

SESSION 2021



PC8M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2.

2.1. Démontrer que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

On pourra utiliser un théorème d'intégration terme à terme.

2.2. En déduire la valeur de : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Calculer $\varphi(1)$.

4.

4.1. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx$.

4.2. En calculant de deux façons différentes $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) dx \right)$, déterminer la valeur

de la somme : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$, après en avoir justifié l'existence.

Exercice 2

Question de cours

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et intégrable sur $] -\infty, -1]$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et F_1 la fonction qui à tout x de \mathbb{R} associe $\int_a^x f(t) dt$.

Justifier que F_1 est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $F_1'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

2. Justifier que la fonction F qui à tout x de \mathbb{R} associe $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer l'expression de $F'(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

* * * * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note E_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note e_k la fonction réelle de la variable réelle $t \mapsto t^k$ et $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ la base canonique de E_n .

On note D l'endomorphisme dérivation de E_n et Id l'endomorphisme identité de E_n .

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f_k : t \mapsto t^k e^t$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$.

4. Soit $f \in E_n$. Montrer que l'on définit sur E_n une application linéaire L en posant $g = L(f)$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t) e^t dt.$$

5. Soit $g \in E_n$ tel que $g = L(f)$.
Montrer que g est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $y' + y = f(x)$.
6. En déduire $\text{Ker}(L)$.
- 7.
- 7.1. Calculer $L(e_0)$.
- 7.2. Montrer que pour tout entier naturel $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $L(e_{k+1}) = e_{k+1} - (k+1)L(e_k)$.
- 7.3. En déduire que L est un endomorphisme de E_n .
8. Prouver que L est un automorphisme de E_n .
9. **Recherche des sous-espaces propres de L**
Soient λ une valeur propre de L et f un vecteur propre associé.
- 9.1. Justifier que $\lambda \neq 0$.
- 9.2. Montrer que f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle : $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ (*).
- 9.3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (*).
- 9.4. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle (*).
- 9.5. En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme L et déterminer les vecteurs propres associés.
L'endomorphisme L est-il diagonalisable ?
10. Comparer L^{-1} et $D + \text{Id}$.
11. Déterminer la matrice M de L^{-1} dans la base \mathcal{B} .
12. Déterminer les valeurs propres de L^{-1} . Retrouver alors les valeurs propres de L .

Exercice 3

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$. Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $-\frac{1}{\gamma}$.
2. Soient (a_n) et (b_n) définies par $b_0 = 0, b_1 = 1$ et les relations de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$.
- 2.1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.
- 2.2. Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de b_n valable pour tout entier naturel n . Laquelle ?
- (1) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $\frac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $\frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.
- 2.3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n en fonction de n .
- 2.4. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\gamma^n = a_n + b_n\gamma$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une unique matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $V_{n+1} = M V_n$.

4. Justifier que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses éléments propres.

5. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = a_n I_2 + b_n M$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$.

Montrer que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite C à l'aide de γ et des matrices I_2 et M .

7. Démontrer que la matrice C est semblable à la matrice $\Delta = \begin{pmatrix} e^\gamma & 0 \\ 0 & e^{-1/\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, \dots, P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E . Soit $(a_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose : $(P|Q) = \sum_{j=0}^n P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

2. Soit P un polynôme de E , calculer $(P|P_0)$.

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on considère le polynôme $L_j(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3.2. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(|)$.

3.3. En déduire que \mathcal{B} est une base de E et qu'elle est orthonormale.

3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base \mathcal{B} .

3.5. Déterminer $\sum_{j=0}^n L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\sum_{j=0}^n P(a_j) = 0$.

4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E .

4.2. Déterminer H^\perp et en déduire la dimension de H .

5. Soit Q un polynôme de E .

5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur H^\perp .

5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H .

FIN