

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES**  
**ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES**

CONCOURS D'ADMISSION 2014

FILIÈRE PC

**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – (XEULC)**

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Ce sujet est consacré à l'étude de propriétés asymptotiques de certaines intégrales à paramètre.

NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS.

**Nombres.** On note  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels non nuls,  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs et  $\mathbb{Z}^*$  l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

**Fonctions numériques.** Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{C}^0(I)$  (respectivement  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ ), l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes). Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{C}^k(I)$  (respectivement  $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ ), l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes). On note  $\mathcal{C}^\infty(I)$  (respectivement  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ ) l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  à valeurs réelles (respectivement à valeurs complexes).

Si  $g$  est une fonction bornée sur  $I$ , on note  $\|g\|_{\infty, I}$  (ou simplement  $\|g\|_\infty$ ) la valeur

$$\|g\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} |g(x)|.$$

Si  $I$  est un intervalle ouvert, on dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est à support compact dans  $I$  s'il existe  $\alpha, \beta \in I$ ,  $\alpha < \beta$ , tels que pour tout  $x \in I \setminus [\alpha, \beta]$ ,  $f(x) = 0$ .

**Séries indexées par  $\mathbb{Z}$ .** Pour une famille de nombres réels ou complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , on dit que la série  $\sum a_n$  est convergente si les deux séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$$

sont convergentes, et on pose alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

**Coefficients de Fourier.** Si  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est périodique de période  $2\pi$ , et si  $n \in \mathbb{Z}$ , le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $\phi$  est

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \phi(x) dx.$$

Dans tout le sujet,  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels tels que  $a < b$ .

Les trois parties du sujet sont indépendantes.

### I - INTÉGRALES À PHASE RÉELLE

1. *Deux cas particuliers.* Soit  $d > 0$ . Soit  $g \in \mathcal{C}^0([0, d])$  telle que  $g(0) \neq 0$ .

(a) Montrer que

$$\int_0^d e^{-tx} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}.$$

*Indication.* Pour  $t > 0$ , on pourra construire une fonction  $g_t$  continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ , bornée, telle que

$$\int_0^d e^{-tx} g(x) dx = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x) dx.$$

(b) Montrer de même que

$$\int_0^d e^{-tx^2} g(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} g(0)}{2\sqrt{t}}.$$

*Indication.* On rappelle l'égalité  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  telle que  $f(a) \neq 0$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Pour tout paramètre  $t \in \mathbb{R}$ , on note

$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx.$$

Les deux cas étudiés à la question 1) correspondent à  $\varphi(x) = x$  et  $\varphi(x) = x^2$ , respectivement, lorsque  $a = 0$  et  $b = d$ .

2. *Cas où la phase  $\varphi$  n'a pas de point critique dans  $[a, b]$ .* On suppose que  $\varphi'(x) > 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

(a) Montrer que  $\Phi : x \mapsto \varphi(x) - \varphi(a)$  réalise une bijection de  $[a, b]$  sur un intervalle de la forme  $[0, \beta]$ , et qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(b) Montrer que

$$F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t}.$$

*Indication.* On se ramènera au cas traité à la question 1a) à l'aide d'un changement de variable.

3. Cas où la phase  $\varphi$  a un point critique en  $a$ . On suppose maintenant que  $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b])$ ,  $\varphi'(a) = 0$ ,  $\varphi''(a) > 0$ , et  $\varphi'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b]$ .

(a) Montrer que la formule  $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$  définit une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Calculer  $\psi'(a)$ .

(b) Montrer que  $\psi$  réalise une bijection de  $[a, b]$  sur un intervalle de la forme  $[0, \beta]$ .

(c) Montrer que

$$F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}.$$

*Indication.* On se ramènera au cas traité à la question 1b) à l'aide d'un changement de variable.

On admettra que le résultat se généralise de la façon suivante :

**Résultat 1.** Soit  $f \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[)$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ . On suppose qu'il existe un unique  $c > 0$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ . On suppose de plus que  $f(c) \neq 0$  et  $\varphi''(c) > 0$ . On suppose finalement que  $\int_0^{+\infty} e^{-\varphi(x)} |f(x)| dx$  converge. Alors,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{\varphi''(c)}} \frac{e^{-t\varphi(c)} f(c)}{\sqrt{t}}.$$

4. *Application.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ .

(a) Calculer  $\Gamma(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On utilisera une récurrence.

(b) En déduire l'équivalent suivant

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}.$$

*Indication.* On réécrira d'abord  $\Gamma(n+1)$  sous la forme

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-n(x-\ln x)} dx.$$

## II - FONCTIONS PÉRIODIQUES

5. *Séries de Fourier.* Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction périodique de période  $2\pi$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,  $c_n(\phi) = \frac{c_n(\phi')}{in}$ .

- (b) Montrer que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$  converge. *Indication. Utiliser la formule de Parseval pour la fonction  $\phi'$ .*
- (c) Montrer que  $\|\phi\|_\infty \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|$ .

Soit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, périodique de période  $2\pi$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Pour tout paramètre  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$J_\varepsilon = \int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) dx.$$

6. *Premier cas.* Dans cette question, on suppose de plus que  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f$  est à support compact dans  $]a, b[$ .

- (a) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| J_\varepsilon - c_0(\psi) \left( \int_a^b f(x) dx \right) \right| \leq \varepsilon(b-a) \|f'\|_\infty \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(\psi)|}{|n|}.$$

*Indication. On pourra se ramener au cas où  $\int_0^{2\pi} \psi(y) dy = 0$ .*

- (b) En déduire la limite de  $J_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

7. *Deuxième cas.* On suppose maintenant seulement que  $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  est périodique de période  $2\pi$ , et  $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  de la façon suivante. On note  $N_\varepsilon$  la partie entière de  $\frac{b-a}{2\pi\varepsilon}$ . On définit alors

$$x_k^\varepsilon = a + 2k\pi\varepsilon, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq N_\varepsilon.$$

- (a) Montrer que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_{N_\varepsilon}^\varepsilon = b$ .

- (b) En déduire que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_{N_\varepsilon}^\varepsilon}^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) dx = 0.$$

- (c) Montrer que pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq N_\varepsilon - 1$ , pour tout  $x \in [x_k^\varepsilon, x_{k+1}^\varepsilon]$ ,

$$|f(x) - f(x_k^\varepsilon)| \leq 2\pi\varepsilon \|f'\|_\infty.$$

- (d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} \int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x_k^\varepsilon) dx = \left( \int_0^{2\pi} \psi(y) dy \right) \left( \varepsilon \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} f(x_k^\varepsilon) \right).$$

- (e) Montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^{N_\varepsilon-1} \int_{x_k^\varepsilon}^{x_{k+1}^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (f(x) - f(x_k^\varepsilon)) dx \right| \leq \varepsilon(b-a) \|f'\|_\infty \left( \int_0^{2\pi} |\psi(y)| dy \right).$$

- (f) En déduire que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(y) dy \right) \left( \int_a^b f(x) dx \right)$ .

8. *Application.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \\ u(0) = \alpha, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

- Justifier l'existence et l'unicité d'une solution de (1), définie pour  $t \in \mathbb{R}$ .
- Calculer cette solution au moyen de la méthode de variation des constantes. On notera cette solution  $u_\varepsilon$ .
- On suppose que  $g$  est  $2\pi$ -périodique. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u_\varepsilon(t)$  admet une limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , limite que l'on calculera.

### III - INTÉGRALES OSCILLANTES

Dans cette partie,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On s'intéresse maintenant à des intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx$$

où  $\lambda$  est un paramètre réel strictement positif.

Dans toute la suite, on fixe  $\lambda > 0$ .

9. *Cas d'une phase non stationnaire.* On suppose dans cette question que  $\varphi'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

- On définit  $L : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$  et  $M : \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$  par : pour tout  $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ , tout  $x \in [a, b]$ ,

$$Lg(x) = \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} g'(x), \quad Mg(x) = -\left(\frac{g}{i\varphi'}\right)'(x).$$

- Déterminer les fonctions  $g \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$  telles que  $Lg = g$ .
- Soit  $g, h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{C})$ . On suppose que  $h$  est à support compact dans  $]a, b[$ . Montrer que

$$\int_a^b h(x)Lg(x)dx = \frac{1}{\lambda} \int_a^b g(x)Mh(x)dx.$$

- Montrer que si  $f$  est à support compact dans  $]a, b[$ , alors pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $\gamma_N$  indépendante de  $\lambda$  telle que

$$|I(\lambda)| \leq \gamma_N \lambda^{-N}.$$

10. (a) On suppose que  $|\varphi'(x)| \geq 1$  pour tout  $x \in [a, b]$  et que  $\varphi'$  est monotone sur  $[a, b]$ . Montrer qu'il existe une constante  $c_1 > 0$ , indépendante de  $\lambda$ ,  $\varphi$  et de  $a, b$ , telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 \lambda^{-1}.$$

*Indication. On pourra écrire*

$$\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \int_a^b i\lambda\varphi'(x) e^{i\lambda\varphi(x)} \frac{1}{i\lambda\varphi'(x)} dx$$

*et intégrer par parties.*

- (b) Soit  $\delta > 0$ . On suppose que  $|\varphi'(x)| \geq \delta$  pour tout  $x \in [a, b]$  et que  $\varphi'$  est monotone sur  $[a, b]$ . Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_1 (\lambda\delta)^{-1}.$$

11. *Cas où la phase peut être stationnaire.* Dans toute cette question, on suppose que  $|\varphi''(x)| \geq 1$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

- (a) Montrer que  $\varphi'$  est strictement monotone sur  $[a, b]$  et qu'il existe un unique point  $c \in [a, b]$  tel que  $|\varphi'(c)| = \inf_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)|$ .
- (b) Si  $x \in [a, b]$ , montrer que  $|\varphi'(x)| \geq |x - c|$ .
- (c) Montrer que pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq 2c_1 (\lambda\delta)^{-1} + 2\delta.$$

- (d) En déduire qu'il existe une constante  $c_2$ , indépendante de  $\lambda, \varphi, a$  et  $b$  telle que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_2 \lambda^{-1/2}.$$

- (e) Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} f(x) dx \right| \leq c_2 \lambda^{-1/2} \left( |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right).$$

\* \*  
\*