

Mines Physique 1 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Ce problème aborde trois thématiques distinctes dans lesquelles les travaux d'analyse de Fourier ont des applications.

- Dans la première partie, on s'intéresse à l'échantillonnage d'un signal électronique. Le but est de démontrer, par une approche graphique qui met en jeu les spectres de Fourier des signaux à échantillonner et échantillonné, le critère de Shannon-Nyquist qui permet de dimensionner correctement le processus d'échantillonnage dans la numérisation d'un signal. Les questions sont sans difficulté même s'il n'est pas toujours facile de comprendre ce qui est attendu dans certaines questions.
- La partie II aborde la transmission du son à travers une paroi, modélisant une cloison entre deux appartements contigus par exemple. Après avoir établi l'équation de propagation de la surpression acoustique, on adopte le formalisme des ondes planes progressives harmoniques en notation complexe. C'est l'occasion de redémontrer et d'utiliser la notion d'impédance acoustique.
- Dans la dernière partie, on étudie la diffusion thermique unidimensionnelle en géométrie cylindrique. On établit l'équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution de la température dans un tore, d'abord en présence d'échanges conducto-convectifs avec l'air, puis en supposant le tore isolé de l'extérieur. On cherche une solution de ce problème sous forme d'une fonction développée en série de fonctions trigonométriques. Historiquement, c'est lors de l'étude d'un dispositif analogue à celui proposé ici que Fourier a introduit les séries qui portent aujourd'hui son nom.

Les trois parties sont de taille comparable et sont indépendantes les unes des autres. Le sujet n'est pas très long et ne présente pas de difficulté majeure. Il n'y a notamment que peu de questions calculatoires et très peu d'applications numériques. C'est cependant un sujet relativement original, pour ses parties II et III, qui aborde des parties différentes du programme de deuxième année.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Linéariser l'expression de $x_e(t)$.
- 2 Exprimer $2\pi f_0 t_k$ en fonction de k pour déterminer rapidement $x_e(t_k)$. Pour que le signal échantillonné puisse être représentatif, il faut qu'il soit de période $1/f_0$.
- 3 L'énoncé ne donnant pas d'expression pour les coefficients a_k , ne pas s'intéresser aux amplitudes des composantes spectrales mais uniquement à leurs fréquences.
- 4 Pour que le spectre du signal échantillonné soit représentatif du signal $x(t)$, la fréquence $f_e - f_0$ doit être plus grande que la fréquence f_0 .
- 7 Être méthodique pour cette question : déterminer successivement la durée en secondes, le nombre d'échantillons nécessaires, et multiplier par la taille occupée par un échantillon. Ne pas oublier que l'enregistrement est stéréo, ce qui implique deux signaux audio distincts. On rappelle que $1 \text{ Mo} = 10^6 \text{ o}$.

Partie II

- 10 Les deux équations recherchées sont le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule fluide et l'équation locale de conservation de la masse.
- 11 Pour démontrer l'expression de Z_a , utiliser une des deux équations aux dérivées partielles introduites dans la question précédente, puis injecter l'expression proposée pour $p_i(x, t)$. Pour introduire c_s , retrouver au préalable la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert.
- 13 Outre les amplitudes des pressions incidente et transmise, le théorème de la résultante cinétique fait intervenir l'amplitude de la pression réfléchie, ainsi que \underline{X} et ses dérivées. Il reste à exprimer ces termes en fonction des pressions incidente et transmise seulement. À partir de la relation sur les vitesses de la question précédente, déduire une relation sur les pressions en utilisant l'impédance acoustique. Pour les termes en \underline{X} , remarquer que $\underline{v}_t(0, t) = j\omega\underline{X}(t)$.
- 14 Le terme élastique est le terme proportionnel à K . Il peut éventuellement être négligé devant le terme inertiel, proportionnel à m . Montrer que cela revient à se placer dans le cas $\omega \gg \omega_0$. Pour avoir une atténuation de 40 dB, il faut choisir la pulsation de coupure à deux décades sous la pulsation choisie.

Partie III

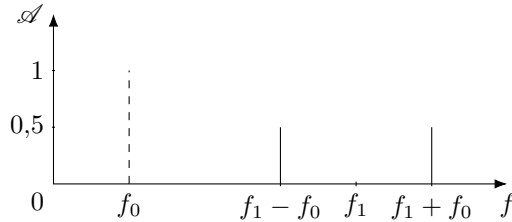
- 15 Pour obtenir τ , raisonner en échelles avec l'équation de la diffusion.
- 16 On est en géométrie cylindrique à r fixé : en effet, puisque $a \ll R$, on a $r = R$.
- 17 Pour établir l'équation vérifiée par la température, appliquer le premier principe au volume élémentaire. Ne pas oublier les échanges conducto-convectifs avec l'air.
- 18 Pour déterminer la dimension de δ , comparer les expressions des flux thermiques conductif et conducto-convectif pour obtenir la dimension de λ/h .
- 19 Pour obtenir les expressions des constantes, exploiter la température, connue, en $\theta = 0$ et traduire l'annulation de $j_{\text{th}}(\pi)$.
- 20 Sur quelle distance caractéristique doit s'effectuer la diffusion pour que tout le tore soit concerné ?
- 21 Après avoir injecté l'expression de $T_n(\theta, t)$, séparer les variables en isolant dans un membre f_n et ses dérivées et dans l'autre g_n et ses dérivées. Ces membres sont constants. Déterminer d'abord g_n puis f_n . f_n est paire par hypothèse.

I. ANALYSE DE FOURIER ET ÉCHANTILLONNAGE D'UN SIGNAL ÉLECTRONIQUE

1 Linéarisons l'expression de $x_e(t)$:

$$x_e(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_1 + f_0)t) + \cos(2\pi(f_1 - f_0)t)]$$

On en déduit que le spectre du signal $x_e(t)$ est composé de deux pics aux fréquences respectives $(f_1 + f_0)$ et $(f_1 - f_0)$. Sur le graphique ci-dessous, le spectre de $x(t)$ est en pointillés et celui de $x_e(t)$ est en traits pleins.



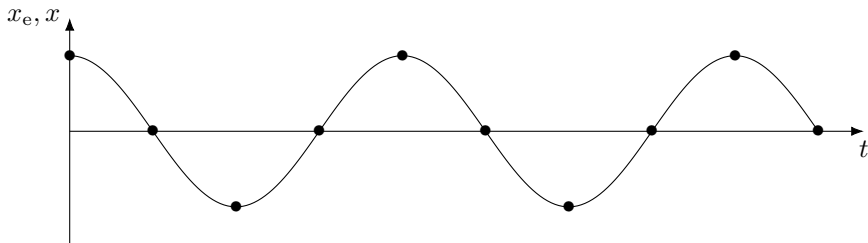
Le spectre proposé est un spectre en amplitude. Le calcul complet de la transformée de Fourier d'un signal peut en effet donner davantage d'informations que la seule amplitude, notamment la phase.

2 Déterminons $x(t_k)$ en exprimant $2\pi f_0 t_k$ pour les différentes valeurs de f_e :

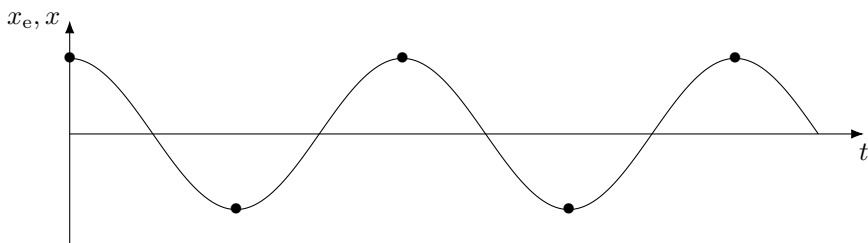
| | | | |
|----------------|-------------------|---------|--------------------|
| f_e | $4 f_0$ | $2 f_0$ | $\frac{4}{3} f_0$ |
| $2\pi f_0 t_k$ | $\frac{k}{2} \pi$ | $k \pi$ | $\frac{3k}{2} \pi$ |

Sur le graphique, on place le signal non échantillonné $x(t)$ en trait continu et on indique les points échantillonnés pour chaque fréquence d'échantillonnage :

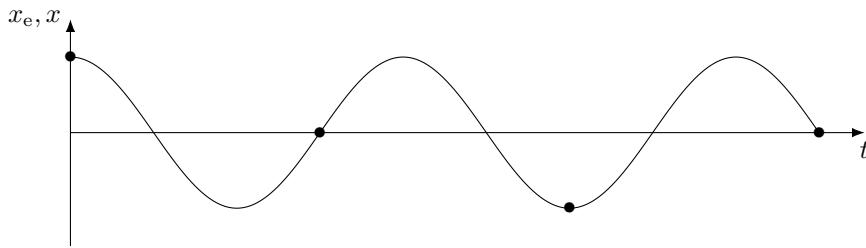
- pour $f_e = 4 f_0$



- pour $f_e = 2 f_0$



- pour $f_e = 4f_0/3$



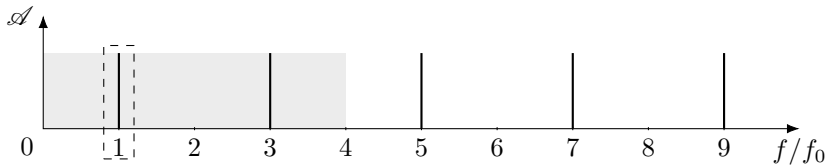
On constate sur ce graphique que l'on ne retrouve pas la fréquence f_0 sur le signal échantillonné à la fréquence $4f_0/3$: en effet, alors que l'on a tracé un peu plus de 2 périodes, ce signal échantillonné ne présente aucune période complète. **La fréquence d'échantillonnage $4f_0/3$ ne permet pas d'obtenir un signal échantillonné représentatif du signal analogique de départ.**

Avec une fréquence d'échantillonnage de $2f_0$, même si la fréquence est correctement restituée, le signal temporel construit en reliant les points échantillonnés donne un triangle, assez éloigné d'une sinusoïde. Même si la représentation temporelle n'est pas encore parfaite pour $f_e = 4f_0$, on comprend qualitativement que la solution est de plus en plus proche à mesure que la fréquence d'échantillonnage augmente.

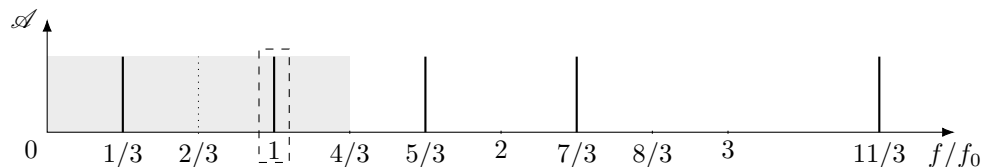
3 Notons $p_k(t) = \cos(2\pi k f_e t)$. On peut alors exprimer $x_e(t)$ sous la forme

$$x_e(t) = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(t) p_k(t)$$

Cette écriture fait apparaître une combinaison linéaire de termes analogues à ceux étudiés dans la question 1. Chacun fait donc apparaître deux composantes spectrales, à $k f_e + f_0$ et $k f_e - f_0$. Ne disposant pas des valeurs des coefficients a_k , on ne peut représenter que le contenu fréquentiel du spectre. On choisit, arbitrairement, de normaliser toutes les amplitudes à 1. On encadre en pointillés le spectre du signal original et on matérialise la fenêtre $[0; f_e]$. Voici le spectre pour $f_e = 4f_0$



et pour $f_e = 4f_0/3$



On peut être surpris de la présence d'un « trou » dans le spectre précédent entre $7f_0/3$ et $11f_0/3$. En pratique, il n'y a pas de trou et les raies sont bien régulièrement espacées. La raie « manquante » est en effet celle à $3f_0$: l'énoncé impose de se limiter à $k \leq 2$ alors que cette raie provient de $k = 3$.