Mines Maths 2 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hugo Koubbi (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Pierre Bosch (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet aborde différents thèmes : la réduction des endomorphismes, l'algèbre linéaire de première année, les polynômes et les systèmes différentiels. Le sujet propose d'établir, pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une caractérisation du comportement asymptotique d'une solution en lien avec le polynôme caractéristique de la matrice associée au système.

Les trois premières parties sont indépendantes.

- Dans la partie I, le sujet étudie les matrices semi-simples, c'est-à-dire les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Le sujet propose de montrer que ces matrices sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice diagonale par blocs dite presque diagonale. Les questions finales constituent un bon entraînement pour revoir les notions d'algèbre linéaire de seconde année.
- Dans la partie suivante, on montre une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: une matrice M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{C}^n$ admet un supplémentaire stable par l'endomorphisme canoniquement associé à M.
- Dans la partie III, on prouve une caractérisation des polynômes de Hurwitz en fonction du signe des coefficients de certains polynômes. Les questions sont abordables avec une bonne connaissance du cours, à l'exception de la dernière qui est nettement plus difficile.
- Dans la dernière partie, on étudie un système différentiel associé à une matrice M. On montre notamment le lemme de Gronwall, exercice classique sur les équations différentielles.

Ce sujet requiert une bonne connaissance du cours de seconde année. En particulier, il faut être à l'aise avec les notions et les techniques de base de réduction, ainsi qu'avec les équations différentielles et l'algèbre linéaire. Une subtilité du sujet consiste à manipuler des espaces que l'on peut considérer comme des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels mais aussi comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, ce qui donne lieu à des difficultés dans les raisonnements. Le sujet est relativement progressif et les questions de synthèse sont les plus difficiles. C'est donc un bon entraînement pour les écrits.

Indications

2 Calculer BW_1 et BW_2. Considérer l'endomorphisme canoniquement associé à B : que dire de la matrice de cet endormorphisme dans la base $(\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2)$?

3 Reproduire le raisonnement de la question 2. Pour montrer que $(\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, on se ramènera à une combinaison linéaire de V et $\overline{\mathrm{V}}$.

4 Pour le sens direct, on pourra distinguer selon le degré du polynôme

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{sp}\,(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$$

annulateur de M scindé à racines simples.

5 Traiter le cas d'un bloc $\mathrm{M}(a, b)$, puis faire un calcul par blocs.

6 Considérer une base de vecteurs propres notée $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p, \mathrm{Z}_1, \overline{\mathrm{Z}}_1, \ldots, \mathrm{Z}_q, \overline{\mathrm{Z}}_q)$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. En posant, pour tout entier $i \in [\![1\,; q]\!]$, $\mathrm{X}_i = \mathrm{Re}\,(\mathrm{Z}_i)$ et $\mathrm{Y}_i = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Z}_i)$, montrer que $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p, \mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{Y}_q)$ forme une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Considérer ensuite la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N dans cette base.

8 Montrer que $\mathrm{Vect}\,(v_k) \in \mathcal{A}$, où v_k est un vecteur vérifiant les conclusions de la question 7.

9 Considérer un espace H dans $\mathcal{A}$ de dimension r, puis supposer par l'absurde que H est différent de E. Utiliser ensuite la question 7.

10 Considérer un supplémentaire d'un hyperplan stable par u grâce à la question 9, puis conclure à une absurdité.

13 Utiliser la forme des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ rappelée par l'énoncé.

14 On pourra considérer le coefficient de degré 3 de Q.

16 Pour le sens réciproque, on pourra distinguer selon que la racine α de P est réelle ou non, et utiliser la question 11. Pour le sens direct, on pourra raisonner par récurrence sur le nombre de facteurs irréductibles de P.

17 Si X est solution de (S), en utilisant le fait qu'il existe une matrice de passage P telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PTP}^{-1}$, montrer que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ est une solution de (S^*).

18 Commencer par résoudre l'équation différentielle vérifiée par z. En identifiant ensuite les parties réelle et imaginaire de z, on trouvera x et y.

19 Pour montrer que la condition est nécessaire, commencer par traiter le cas où Y est une solution du problème (S^*). Choisir des conditions initiales adaptées pour se ramener à ce cas. Pour le sens direct, on pourra utiliser la question 17 et la forme des solutions du problème (S^*).

20 On commencera par calculer la différentielle de $h : x \longmapsto \langle x \mid x \rangle$, puis on pourra dériver la fonction $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{2\beta t} \|\phi(t)\|^2$ définie dans l'indication. Pour ce calcul, on pourra utiliser l'expression de la différentielle de h et la règle de la chaîne.

21 Pour A_2 implique A_1, remarquer que les coordonnées d'une solution de (S^*) sont des combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution de (S). En utilisant la question 6, se ramener au cas d'une matrice presque diagonale. Conclure en faisant des calculs par blocs soit en utilisant la question 19 pour les blocs de taille 2, soit en résolvant une équation différentielle du premier ordre pour les blocs de taille 1. Pour A_1 implique A_3, on commencera par montrer l'inégalité pour (S^*) en utilisant la question 20, après avoir vérifié que la matrice N vérifie la condition (C). Pour se ramener au système (S), on utilisera une propriété de la continuité de la multiplication par une matrice.

I. Matrices semi-simples

1 Commençons par calculer les valeurs propres de la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

à l'aide du polynôme caractéristique. Pour les matrices de taille 2×2, nous avons l'expression suivante

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\mathrm{X} + \det(\mathrm{A})$$

Ici, $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = 4$ et $\det(\mathrm{A}) = 4$. Il s'ensuit

$$\chi_\mathrm{A} = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 4 = (\mathrm{X} - 2)^2$$

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, on obtient donc $\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \{2\}$.

> Quitte à se placer dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, la matrice A admet deux valeurs propres λ et $\overline{\lambda}$ complexes conjuguées car le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et à coefficients réels. Pour les matrices de taille 2×2, les valeurs propres sont les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues :
>
> $$\begin{cases} \det(\mathrm{A}) = \lambda\,\overline{\lambda} = 4 \\ \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \lambda + \overline{\lambda} = 4 \end{cases}$$
>
> Ainsi, $|\lambda| = 2$ et $\mathrm{Re}\,(\lambda) = \dfrac{\lambda + \overline{\lambda}}{2} = 2$ d'où $\lambda = 2 = \overline{\lambda}$. De cette manière, on retrouve le spectre de A.

La matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé à racines simples sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Comme $\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \{2\}$, c'est le cas si et seulement si $\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_n = 0$. Comme $\mathrm{A} \neq 2\mathrm{I}_n$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La matrice A n'est pas semi-simple.}}$$

> Une autre méthode pour conclure est de supposer par l'absurde que A est diagonalisable. Comme la seule valeur propre de A est 2, il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que
>
> $$\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}(2\mathrm{I}_2)\mathrm{P}^{-1} = 2\mathrm{I}_2$$
>
> car I_2 et P commutent.

2 Commençons par calculer le polynôme caractéristique de B :

$$\chi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})\mathrm{X} + \det(\mathrm{B}) = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 13$$

Le discriminant du polynôme χ_B est $\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 < 0$. Les valeurs propres de B sont les racines du polynôme caractéristique, soit

$$\lambda = \frac{4 + 6\mathrm{i}}{2} = 2 + 3\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{4 - 6\mathrm{i}}{2} = 2 - 3\mathrm{i}$$

Par conséquent, χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, on en déduit que B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit

$$\boxed{\text{La matrice B est semi-simple.}}$$

Déterminons à présent un vecteur propre pour B associé à la valeur propre λ. Soit $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un tel vecteur propre, on a le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ -5x + y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (1-3\mathrm{i})x = -2y \\ -5x = (3\mathrm{i}+1)y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{-1+3\mathrm{i}}{2}x = y \\ \dfrac{-5}{3\mathrm{i}+1}x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ -5x + y = \lambda y \end{cases} \iff \frac{-1+3\mathrm{i}}{2}x = y$$

Un vecteur propre associé à la valeur propre est alors donné par $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1+3\mathrm{i})/2 \end{pmatrix}$. Posons $\mathrm{W}_1 = \mathrm{Re}\,(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{W}_2 = \mathrm{Im}\,(\mathrm{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. La famille $(\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car libre et de cardinal 2. Calculons

$$\mathrm{BW}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11/2 \end{pmatrix} = 2\mathrm{W}_1 - 3\mathrm{W}_2$$

et
$$\mathrm{BW}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3\mathrm{W}_1 + 2\mathrm{W}_2$$

Ainsi, la matrice représentant l'endomorphisme canoniquement associé à B dans la base $(\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2)$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant Q la matrice inversible de passage de la base canonique à la base $(\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2)$, on a bien

$$\boxed{\mathrm{B} = \mathrm{Q}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\mathrm{Q}^{-1}}$$

3 Cette question généralise le résultat de la question précédente aux matrices de taille 2×2 semi-simples à valeurs propres complexes non réelles conjuguées.

Montrons dans un premier temps que M est semi-simple. Par hypothèse, M admet deux valeurs propres complexes distinctes. Il s'ensuit que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et que M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, ce qui revient à dire que

$$\boxed{\text{La matrice M est semi-simple.}}$$

Soit V un vecteur propre de B associé à la valeur propre μ. Reproduisons le raisonnement de la question précédente et considérons $\mathrm{W}_1 = \mathrm{Re}\,(\mathrm{V})$ et $\mathrm{W}_2 = \mathrm{Im}\,(\mathrm{V})$, de sorte que $\mathrm{V} = \mathrm{W}_1 + \mathrm{i}\mathrm{W}_2$. On a alors $\mathrm{BV} = \mu\mathrm{V}$. D'où

$$\mathrm{B}(\mathrm{W}_1 + \mathrm{i}\mathrm{W}_2) = (a + \mathrm{i}b)(\mathrm{W}_1 + \mathrm{i}\mathrm{W}_2)$$

donc
$$\mathrm{BW}_1 + \mathrm{i}\mathrm{BW}_2 = (a\mathrm{W}_1 - b\mathrm{W}_2) + \mathrm{i}(b\mathrm{W}_1 + a\mathrm{W}_2)$$