Mines Physique 2 PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gaëlle Dumas (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean-Christophe Tisserand (professeur en CPGE) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Ce sujet aborde certaines caractéristiques des araignées et de leurs fils de soie.

- Dans la première partie, on étudie la capacité de certaines araignées à s'envoler. On s'intéresse ici aux forces hydrodynamiques et électrostatiques qui s'appliquent aux fils que les araignées déploient pour décoller.
- La partie II est consacrée à la vibration d'un fil de soie d'araignée. Elle est très proche du cours sur la corde de Melde et demande donc une rédaction rigoureuse.
- Enfin, on étudie la formation des chapelets de gouttes d'eau sur une toile d'araignée. Cette dernière partie rassemble des questions d'hydrodynamique dont certaines sont assez calculatoires.

Le sujet couvre une grande partie du programme de physique de PC : l'électrostatique, l'hydrodynamique, les cordes vibrantes. On y trouve une partie très proche du cours (II), des questions plus calculatoires (III) et d'autres faisant appel aux capacités de raisonnement (I).

Indications

Partie I

1 Modéliser l'araignée comme une sphère remplie d'eau.

2 Utiliser le théorème de Gauss en coordonnées sphériques, et veiller à montrer le signe de la charge.

5 Attention à ne pas oublier la charge diamétralement opposée, ni le facteur 1/2 dans l'énergie d'interaction électrostatique.

6 Poser $\alpha = \alpha_{\text{eq}} + \varepsilon$ autour de la position d'équilibre α_{eq}.

7 On veut l'énergie du système, pas celle d'un seul fil. Attention, la charge q est négative.

Partie II

15 Il n'est pas utile de résoudre l'équation de dispersion, qui prend la forme d'une équation du second degré en k. Les mêmes conditions aux limites s'appliquent ici, donc l'expression de k_n est la même qu'à la question 13.

Partie III

16 Écrire la conservation du volume d'eau entre les états initial et modulé.

18 La stabilité s'étudie en fonction des variations de $\Delta \mathrm{E}_\lambda(\varepsilon)$.

23 Faire un bilan de masse entre t et $t + \mathrm{d}t$ sur la portion de film entre z et $z + \mathrm{d}z$.

I. Des araignées volantes

1 On modélise l'araignée par une sphère remplie d'eau. Sa masse vaut donc

$$m_{\rm g} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\rm e}$$

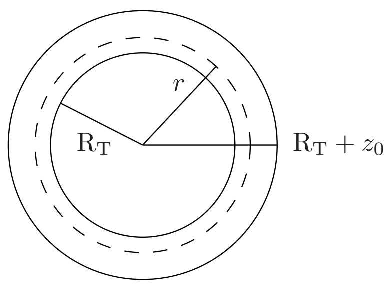
avec r le rayon de la sphère compris entre 1 et 3,5 mm pour les araignées étudiées et $\rho_{\rm e} = 10^3$ kg.m^{-3}. L'ordre de grandeur de la masse de ces araignées est donc

$$\frac{4}{3}\pi \times 10^{-6}\ \text{kg} \leqslant m_{\rm g} \leqslant \frac{4}{3}\pi \times 10^{-6} \times 3{,}5^3\ \text{kg}$$

$$4.10^{-6}\ \text{kg} \leqslant m_{\rm g} \leqslant 200.10^{-6}\ \text{kg}$$

$$\boxed{\text{La masse des araignées est comprise entre 4 mg et 200 mg.}}$$

2 On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r centrée sur la Terre avec r compris entre $\rm R_T$ et $\rm R_T + z_0$, $\rm R_T$ étant le rayon de la Terre.



On se place en symétrie sphérique : le champ électrostatique est radial et ne dépend que de r : $\overrightarrow{\rm E} = -{\rm E}(r)\overrightarrow{e_r}$, avec ${\rm E}(r) > 0$ la norme de $\overrightarrow{\rm E}$, dirigé vers le centre de la Terre. On a alors

$$-4\pi r^2 {\rm E}(r) = \frac{\rm Q}{\varepsilon_0}$$

avec $\rm Q < 0$ la charge totale portée par la Terre. En supposant qu'elle est chargée uniformément en surface avec une charge surfacique σ, on obtient

$$\rm Q = 4\pi {R_T}^2 \sigma$$

d'où
$$-4\pi r^2 {\rm E}(r) = \frac{4\pi {\rm R_T}^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

et enfin
$$\sigma = -\varepsilon_0 {\rm E}(r) \frac{r^2}{{\rm R_T}^2}$$

En évaluant cette expression en $r = \rm R_T$, on trouve

$$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0 {\rm E}_0}$$

AN:
$$\boxed{\sigma = -120 \times 8{,}9.10^{-12} \simeq -1\ \text{nC/m}^2}$$

L'atmosphère est modélisée comme un condensateur plan formé de deux armatures, le sol et l'ionosphère, séparées de $z_0 = 60$ km. Dans le cadre de ce modèle, il y a une différence de potentiel entre les deux armatures $\Delta{\rm V} = {\rm V}(z_0) - {\rm V}(0) = {\rm E}_0 z_0$. L'application numérique donne

$$\boxed{\Delta{\rm V} = 120 \times 60.10^3 \simeq 7.10^3\ \text{kV}}$$

Cette valeur est 20 fois plus grande que la valeur mesurée de 360 kV. **Le modèle de condensateur pour l'atmosphère n'est donc pas correct**.

> On peut faire ce calcul en symétrie sphérique en intégrant le champ
> $$\overrightarrow{\mathrm{E}}(r) = -\mathrm{E}_0 \frac{{\mathrm{R_T}}^2}{r^2} \overrightarrow{e_r} = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r} \overrightarrow{e_r}$$
> entre $r = \mathrm{R_T}$ et $r = \mathrm{R_T} + z_0$:
> $$\Delta \mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{R_T} + z_0) - \mathrm{V}(\mathrm{R_T}) = \int_{\mathrm{R_T}}^{\mathrm{R_T}+z_0} \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}r}(r)\mathrm{d}r$$
> soit
> $$\Delta \mathrm{V} = \mathrm{E}_0 z_0 \frac{\mathrm{R_T}}{\mathrm{R_T} + z_0}$$
> avec $\mathrm{R_T} = 6\,400\,\mathrm{km}$ et $z_0 = 60\,\mathrm{km}$. On retrouve le résultat précédent à un facteur $\mathrm{R_T}/(\mathrm{R_T} + z_0) \simeq 0{,}99$ près. L'erreur commise en considérant la Terre et l'ionosphère comme 2 plans est de 1 % seulement. L'erreur vient bien du modèle du condensateur, indépendamment de la géométrie adoptée.

3 Le nombre de Reynolds est sans dimension. Il compare les termes convectif et diffusif de l'équation de Navier-Stokes. On le calcule via

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\rho \mathrm{V} d}{\eta}}$$

avec ρ et η la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide (ici l'air), V la vitesse caractéristique du fluide et d une grandeur caractéristique du système. Dans le phénomène étudié ici, $\mathrm{V} = \mathrm{U} = 0{,}1\,\mathrm{m.s^{-1}}$ et comme le fil est face au vent, son diamètre d vaut $2r$. La masse volumique de l'air vaut $\rho_\mathrm{a} = 1\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, d'où le nombre de Reynolds de notre problème :

$$\mathcal{R}_e = \frac{2\rho_\mathrm{a} \mathrm{U} r}{\eta_\mathrm{a}} \simeq \frac{1 \times 0{,}1 \times 2.10^{-6}}{1{,}9.10^{-5}} \simeq 10^{-2} \ll 1$$

On est donc en **régime laminaire** rampant et les effets de la viscosité l'emportent sur les effets convectifs.

4 Dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, la force de traînée s'exerçant sur le fil de soie est proportionnelle à **la vitesse relative** entre l'air et le fil, à **la viscosité de l'air** et à **la taille caractéristique** du système. Le coefficient de proportionnalité dépend de facteurs géométriques.

En supposant que toutes les forces s'additionnent pour chaque fil, les n fils imposent une force totale $n\mathrm{F_h}$ avec $\mathrm{F_h} \sim 1\,\mu\mathrm{N}$. Cette force doit au minimum compenser le poids de l'araignée pour qu'elle puisse décoller : $m_\mathrm{g} g = n\mathrm{F_h}$ donc

$$n = \frac{m_\mathrm{g} g}{\mathrm{F_h}} \simeq \frac{4.10^{-6} \times 10}{1.10^{-6}} \simeq 40$$

Il faut donc **une quarantaine de fils** pour que les plus petites araignées décollent. Ce nombre est en accord avec ce qui a été observé par Darwin. En revanche, les araignées les plus lourdes, de masse 200.10^{-6} kg, devraient fabriquer 2 000 fils pour pouvoir décoller. **La force hydrodynamique seule ne suffit pas à faire décoller les araignées**.