Mines Maths 1 PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Michèle Nouvet (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

L'objet de ce problème d'analyse est d'obtenir une suite dominante de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où p_n est le nombre de partitions d'un entier naturel n, défini au début de la partie C. Les parties B, C et D utilisent les résultats de la partie A mais peuvent être traitées indépendamment en admettant ces derniers.

- Dans la partie A, on étudie deux fonctions définies sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, la somme L d'une série entière et la limite P d'un produit. Cette partie est très abordable et proche du cours.
- La partie suivante établit un développement asymptotique au voisinage à droite de 0 de la quantité $\mathrm{P}(\mathrm{e}^{-t})$, dont le résultat sera utilisé dans la partie E. On y utilise à la fois de l'analyse classique de première année et des théorèmes d'interversion séries-intégrales de PC.
- La troisième partie définit et étudie le nombre p_n, notamment en reliant la série entière $\sum p_n z^n$ aux fonctions L et P de la partie A. Les questions 17 et 18 sont les deux seules questions de combinatoire du sujet. La dernière question revient à démontrer la formule intégrale de Cauchy pour les fonctions de la variable complexe, adaptée à ce cadre.
- Dans la partie D, on majore le module d'une quantité dépendant de la fonction P de la question 21. Les calculs sont un peu techniques mais bien guidés par l'énoncé.
- Enfin, la dernière partie conclut sur une suite dominante de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, proche d'un équivalent montré par Hardy et Ramanujan en 1918. Elle est constituée d'une unique question, abordable en admettant les résultats intermédiaires.

Comme souvent, ce problème de combinatoire est relié à des notions d'analyse, pour une fois sans probabilités. Il nécessite beaucoup de manipulations d'inégalités et de majorations d'intégrales.

Le travail s'effectue surtout sur les séries entières. On utilise divers théorèmes d'analyse de PC comme l'intégration terme à terme, les intégrales à paramètres et la convergence normale, ce qui permet de balayer l'essentiel du programme d'analyse de prépa. Seule la partie D est abordable dès la première année et peut être extraite pour s'entraîner avant la PC.

Par ailleurs, on peut retrouver un lien entre les partitions d'un entier naturel n et les classes de conjugaison du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (les permutations de $[\![1\,;n]\!]$) dans le sujet Centrale Maths 1 MP 2020.

Indications

Partie A

1 Majorer le terme général de la série et reconnaître une primitive d'une série géométrique.

2 Dériver terme à terme la série entière Φ de la variable t.

3 Montrer que $\Psi' = 0$.

4 Utiliser l'inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes.

5 Étudier les sommes partielles de la série définie dans la question 4.

Partie B

6 Pour la parité de $|q|$, distinguer les cas suivant le signe de $q(x)$.

8 Calculer

$$\int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

puis sommer et se ramener à des sommes télescopiques.

9 Poser $n = \lfloor x \rfloor$, majorer l'intégrale, puis utiliser la formule de Stirling.

10 Développer en série l'intégrande à l'aide de la fonction L puis intégrer terme à terme.

11 Après avoir montré l'indication de l'énoncé, majorer l'intégrande à l'aide de cette fonction.

12 Appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres sur $\mathbb{R}_+^*$, puis montrer la continuité en 0 à l'aide d'un équivalent.

13 Distinguer les cas des indices pairs et impairs, puis appliquer le critère spécial des séries alternées.

14 Montrer que la convergence de $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ puis utiliser la continuité en 0 de la somme.

15 Calculer

$$\int_n^{n+1} \frac{tq(u)}{\mathrm{e}^{\,tu}-1}\,\mathrm{d}u$$

à l'aide d'une intégration par parties. Sommer pour $n \in [\![1\,; \mathrm{N}]\!]$ puis étudier les limites quand $\mathrm{N} \to +\infty$.

16 Isoler le terme $\ln(\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,-t}))$ dans le résultat de la question 15 puis utiliser le changement de variable $v = tu$ dans l'intégrale.

Partie C

17 Établir une injection de $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}+1}$ et montrer que c'est une bijection pour tout $\mathrm{N} \geqslant n$.

18 Développer le quotient en série géométrique. Pour l'hérédité de la récurrence, effectuer un produit de Cauchy de séries absolument convergentes et partitionner $\mathrm{P}_{n,\mathrm{N}+1}$ suivant la valeur du dernier terme de la liste.

19 Utiliser le résultat de la question 17 pour majorer la somme.

20 Utiliser le résultat de la question 17 et l'inégalité triangulaire, puis le résultat de la question 18.

21 Intégrer terme à terme le développement en série de $\mathrm{P}(\mathrm{e}^{\,-t}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta})$.

Partie D

22 Calculer le module avec la formule $|\mathrm{e}^{z}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, puis majorer une somme de réels négatifs par son premier terme. Pour la seconde partie de la question, majorer des sommes partielles d'ordre N par des sommes géométriques et étudier les limites quand $\mathrm{N} \to +\infty$.

23 Calculer le module de la partie réelle puis le minorer. Pour la seconde partie de la question, utiliser l'indication de l'énoncé.

24 Utiliser qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Appliquer les inégalités de la question 23 à $x = \mathrm{e}^{-t}$.

25 Majorer

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\beta\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2}\right)\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\gamma\left(t^{-3/2}\theta\right)^{2/3}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

en utilisant la parité des intégrandes, le changement de variable $u = t^{-3/2}\theta$.

Partie E

26 Utiliser les résultats des questions 16, 23 et 21.

A. Fonctions L et P

1 Soit $z \in \mathrm{D}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left|\frac{z^n}{n}\right| \leqslant |z|^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente car $|z| < 1$. Ainsi la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$$

converge absolument, donc converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathrm{D}, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} \text{ converge.}}$$

La série entière
$$\sum_{n\geqslant 1} z^{n-1}$$

a pour somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} z^m = \frac{1}{1-z}$$

sur l'intervalle de réels $]-1\,;1\,[$ car c'est une série géométrique. En intégrant terme à terme cette série entière entre 0 et $t \in\,]-1\,;1\,[$, comme le terme constant est nul, on obtient

$$\boxed{\forall z \in\,]-1\,;1\,[\quad \mathrm{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)}$$

> On peut aussi affirmer d'après le cours que l'on a le développement en série entière suivant
>
> $$\forall x \in\,]-1\,;1\,[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$
>
> d'où
>
> $$\forall z \in\,]-1\,;1\,[\quad \mathrm{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-z)^n}{n} = -\ln(1-z)$$

2 Soit $z \in \mathrm{D}$ avec $z \neq 0$ et posons $a = 1/\,|z|$. On a $a > 1$. Pour tout $t \in\,]-a\,;a\,[$, on a $|tz| < 1$, de sorte que la quantité

$$\Phi(t) = \mathrm{L}(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$$

est bien définie. De plus, la fonction Φ est la somme d'une série entière de la variable t. Notons R son rayon. Si $z = 0$, alors $\Phi(t) = 0$. Sinon, $z \neq 0$ et si $|t| < 1/\,|z|$, alors

$$\left|\frac{\dfrac{z^{n+1}}{n+1} t^{n+1}}{\dfrac{z^n}{n} t^n}\right| = \frac{n}{n+1}\,|z|\,|t| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|\,|t| < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, cette série entière converge, donc $\mathrm{R} \geqslant 1/\,|z| > 1$. En tant que série entière, Φ est dérivable sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, et en dérivant terme à terme, il vient, pour tout $t \in [\,-1\,;1\,] \subset\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$,

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{L}(tz)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{+\infty} (zt)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}$$