e3a Mathématiques PC 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants couvrant une bonne partie du programme des première et deuxième années : probabilités et variables aléatoires, suites, séries, intégration, algèbre linéaire, espaces euclidiens.

- Dans l'exercice 1, on étudie une variable aléatoire modélisant la probabilité qu'un sauteur franchisse successivement des barres de plus en plus haut. C'est l'occasion de mener plusieurs calculs de sommes de séries.
- L'exercice 2 utilise un développement en série entière pour calculer la somme de la série alternée des intégrales de Wallis

  $$\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

  C'est un cas où le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas.
- L'exercice 3 porte sur l'étude de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

  $$g(e_1) = \sum_{i=2}^{n} e_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![\, 2\,;n \,]\!] \qquad g(e_i) = e_1$$

  On détermine ses éléments propres, une base de son noyau, et son image. Cette partie se finit par la résolution du système différentiel

  $$\mathrm{X}' = (\mathrm{G} + \mathrm{I}_n)\mathrm{X} + t\mathrm{U}$$

  où G est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et U un vecteur propre de g pour son unique valeur propre.
- Le dernier exercice propose de montrer l'égalité

  $$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

  après avoir montré la convergence de l'intégrale.

Ce sujet est complet et proche du cours, sans difficulté technique et extrêmement guidé. Il est parfait pour travailler ou réviser les fondamentaux.

Indications

Exercice 1

I.3 Il y a deux informations données par l'énoncé : d'une part, X est une variable aléatoire *réelle*, d'autre part, pour $\omega \in \Omega$ (univers), $X(\omega)$ est un numéro de saut.

I.4 L'énoncé semble indiquer que le sauteur s'arrête au premier échec, et qu'il échoue à un moment. Utiliser la formule des probabilités composées.

I.5 Le sauteur doit franchir toutes les hauteurs précédentes.

I.8 Écrire le terme de la série de façon télescopique et utiliser le développement en série de l'exponentielle.

Exercice 2

II.1.1 Remarquer que $\cos t \in [\,0\,;1\,]$ pour tout $t \in [\,0\,;\pi/2\,]$ et utiliser la croissance de l'intégrale.

II.1.2 Penser au théorème de convergence dominée.

II.2.3.1 Faire une intégration par parties sur $|u_{n+2}|$ en utilisant $\cos^2 = 1-\sin^2$.

II.2.3.3 Que dire de la série $\sum \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$?

Exercice 3

III.2 Que dire des matrices F et G ?

III.3 Utiliser la trace.

III.3.4.2.(i) Diagonaliser g.

III.3.5 Remarquer que la condition d'ordre des valeurs propres requise demande que la 1^{re} colonne soit un vecteur propre pour λ_1.

III.4 Utiliser la réduction de F pour se ramener à des équations différentielles scalaires.

Exercice 4

IV.1.1 Utiliser la limite de référence $\lim\limits_0 (\sin t)/t$.

IV.1.2 Penser aux intégrales de Riemann.

IV.1.4 Appliquer un théorème du cours en remarquant que f est une intégrale à paramètre. On raisonnera sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

IV.2.1.1 Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

IV.2.2 Même indication que pour IV.1.4.

IV.3.3 Penser à utiliser le résultat de la question IV.3.2.

IV.4.1, IV.4.2 Utiliser le théorème d'encadrement et les questions IV.2.1.

IV.4.3 Primitiver deux fois en n'oubliant pas la constante !

IV.5 Montrer que l'intégrale à calculer est la limite en 0 de f, puis utiliser les résultats des questions IV.1.4 et IV.4.2.

Exercice 1

I.1.1 D'après le cours, si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(A_k \mid A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})}$$

I.1.2 D'après le cours, le développement en série entière au voisinage de 0 de exp est

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

I.1.3 Puisque X est un numéro de saut s'il existe, on a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. L'énoncé semble indiquer que le sauteur s'arrête au premier échec même si ça n'est pas très clair. Il semble aussi faire l'hypothèse que le sauteur échoue à un moment presque sûrement, mais ce ne sera prouvé qu'en question I.8. En effet, aucun saut n'est un échec certain vu que pour tout entier n, $0 < p_n < 1$. De plus, aucun autre saut que le premier n'est une réussite certaine pour la même raison, donc X prend des valeurs entières arbitrairement grandes et ne « saute » aucune valeur entière. On a donc, directement par le modèle décrit,

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

I.1.4 L'événement $[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}$ signifie que le sauteur réussit le premier saut puis échoue. D'après la formule des probabilités composées

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2} \mid S_1) = \mathbb{P}(S_1)(1 - \mathbb{P}(S_2 \mid S_1)) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

I.1.5 L'événement $[X = 2]$ signifie que le sauteur réussit le premier saut, puis le deuxième, puis échoue, soit

$$\boxed{[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}}$$

D'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = 1]) &= \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(S_2 \mid S_1)\,\mathbb{P}(\overline{S_3} \mid S_1 \cap S_2)\\ &= \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(S_2 \mid S_1)(1 - \mathbb{P}(S_3 \mid S_1 \cap S_2))\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$$

I.1.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[X = n]$ signifie que le sauteur réussit les n premiers sauts puis échoue, soit

$$\boxed{[X = n] = S_1 \cap \dots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}}$$

I.1.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités composées et avec le résultat de la question I.1.6 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) &= \mathbb{P}(\mathrm{S}_1)\left(\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{S}_k \mid \mathrm{S}_1\cap\cdots\cap\mathrm{S}_{k-1})\right)\times\mathbb{P}(\overline{\mathrm{S}_{n+1}} \mid \mathrm{S}_1\cap\cdots\cap\mathrm{S}_n))\\
&= \mathbb{P}(\mathrm{S}_1)\left(\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{S}_k \mid \mathrm{S}_1\cap\cdots\cap\mathrm{S}_{k-1})\right)\times(1-\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n+1} \mid \mathrm{S}_1\cap\cdots\cap\mathrm{S}_n)\\
\mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) &= \left(\prod_{k=1}^{n}p_k\right)\times(1-p_{n+1}) = 1\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{n}\times\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) = \frac{n}{(n+1)!}}$$

I.1.8 D'après la question I.1.7 et les croissances comparées on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) = \frac{n}{(n+1)!} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente d'après le critère de Riemann, donc la série $\sum \mathbb{P}([\mathrm{X}=n])$ converge absolument par comparaison. De plus, par télescopage on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{1!} - \lim\frac{1}{(n+1)!} = 1}$$

> Ce résultat qui était attendu est rassurant : l'hypothèse que l'on peut considérer une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Si vous êtes courageux, vous pouvez chercher à montrer qu'en modifiant le taux de succès au n-ième saut, la conclusion précédente est valide si et seulement si la série $\sum p_n$, qui est à termes dans $]\,0\,;1\,]$, est une série divergente.

I.1.9 D'après la question I.1.7 on a

$$n\,\mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) = \frac{n^2}{(n+1)!} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le critère de Riemann montre donc que $\sum n\,\mathbb{P}([\mathrm{X}=n])$ converge absolument, d'où

$$\boxed{\text{La variable aléatoire X admet une espérance.}}$$

Cette espérance s'obtient en reprenant les calculs de la question I.1.8 et en utilisant la convergence de la série $\sum 1/n!$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}([\mathrm{X}=n])\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n!}-\frac{n}{(n+1)!}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}([\mathrm{X}=n]) && \text{(linéarité)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 1 && \text{(changement d'indice)}\\
\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X})} &\boxed{= \mathrm{e} - 1} && \text{(question 1.2)}
\end{aligned}$$