Mines Physique 1 MP 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Le sujet porte sur les bilans d'énergie et transferts thermiques entre d'une part des fils électriques soumis à l'effet Joule et d'autre part le fluide qui s'écoule autour d'eux. On cherche à montrer que l'étude de l'évolution de la température des fils, ou la mesure de leur résistance électrique, permet d'accéder à la vitesse de l'écoulement du fluide dans lequel ils baignent.

- Dans la partie I, on commence par des rappels de cours sur la puissance volumique dissipée par effet Joule et sur la loi d'Ohm locale, puis autour de la loi de Fourier et l'équation de la chaleur. Le transfert thermique par conducto-convection est alors introduit dans l'équation de la chaleur. On résout cette dernière dans le cas d'un fil rectiligne soumis à l'effet Joule, en s'appuyant sur une modélisation unidirectionnelle. Cela aboutit au profil de température dans le fil. La pertinence de la prise en compte des bords du fil est alors discutée. On est ensuite amené à relier la conducto-convection à la vitesse d'écoulement du fluide baignant le fil. Puisque la résistivité électrique d'un conducteur dépend de sa température, elle-même fonction de la vitesse d'écoulement du fluide autour du conducteur, une relation explicitant le lien entre vitesse d'écoulement et résistance électrique du fil est établie. C'est sur ce principe que reposent de nombreux anémomètres à fil chaud.
- La seconde partie s'intéresse à une autre géométrie permettant d'accéder à la vitesse de l'écoulement. Deux fils sont utilisés : l'un sert à chauffer le fluide, qui s'écoule jusqu'au second et le réchauffe. La durée séparant les pics d'échauffement de chacun est directement liée à la vitesse de l'écoulement. Cela est explicité à l'aide d'un bilan d'énergie sur chaque fil, qui conduit à la résolution de deux équations différentielles courantes du premier ordre.

Ce sujet très calculatoire porte sur une portion restreinte du programme et teste un nombre limité de compétences. On pourra donc l'utiliser pendant l'année pour travailler les chapitres associés. Les deux parties peuvent être traitées séparément.

Indications

Partie I

2 Dans cette question, on ne prend pas en compte l'effet Joule et la conducto-convection.

4 Le transfert thermique conducto-convectif se déroule à travers l'interface fil/fluide et non la section droite du fil. Prendre garde aux signes : la puissance Joule est la puissance reçue par le fil, mais la puissance conducto-convective est la puissance perdue par le fil, telle qu'elle est définie.

5 Remplacer ρ_{w} par son expression fournie.

6 Les constantes d'intégration se déterminent en prenant en compte la solution particulière.

9 Remarquer que $\mathrm{T}_{\mathrm{w,max}} = \mathrm{T}_{\mathrm{w}}(0)$. Approximer les cosinus et tangente hyperboliques pour obtenir que $\xi \simeq 1{,}3$.

15 Montrer que $\langle \mathrm{T}_{\mathrm{w}} \rangle = \mathrm{T}_{\mathrm{f}} + \mathrm{K}_2 {\ell_{\mathrm{c}}}^2$. En utilisant les résultats des questions 5 et 11, en déduire que

$$\mathrm{R}_{\mathrm{w},\infty} = \mathrm{R}_{\mathrm{f}} \, \frac{4h\, {\ell_{\mathrm{c}}}^2}{\lambda_{\mathrm{w}} d_{\mathrm{w}}}$$

Éliminer alors h au profit de $\mathcal{N}_{\mathrm{u}}$.

16 Dans cette question, on ne se place pas dans l'approximation du fil long. Reconnaître la même intégrale que celle calculée à la question 8.

17 Exploiter $\dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{j}} = \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{f}}$, puis réexprimer $\langle \mathrm{T}_{\mathrm{w}} \rangle - \mathrm{T}_{\mathrm{f}}$ à l'aide de la question 11. Éliminer h au profit de $\mathcal{N}_{\mathrm{u}}$. Invoquer la loi de King pour remplacer $\mathcal{N}_{\mathrm{u}}$ et faire apparaître $\mathcal{R}_{\mathrm{e}}$, puis V.

Partie II

18 Appliquer le premier principe de la thermodynamique sur le fil émetteur tout entier en négligeant les transferts thermiques autres que le chauffage par effet Joule. Remplacer R_{w} par son expression en fonction de R_{f}.

19 Attention aux signes dans l'exponentielle et la solution particulière.

20 Reprendre le raisonnement de la question 18 en ne prenant en compte que la conducto-convection.

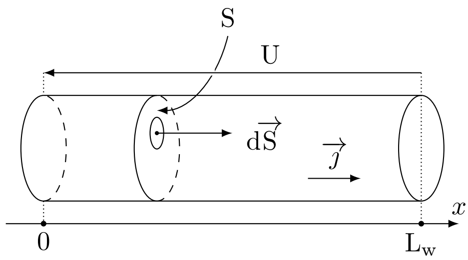
L'anémométrie à fil chaud

I. Étude énergétique de l'anémomètre

1 Notons $\overrightarrow{\jmath}$ le **vecteur densité de courant volumique de charge** (dont la norme est en $\mathbf{A/m^2}$), $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ le **champ électrique** (dont la norme est en $\mathbf{V/m}$). La loi d'Ohm s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\jmath} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{w}}}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}}$$

où ρ_{w}, inverse de la conductivité électrique, s'exprime en $\mathbf{m/S}$ (ou $\mathbf{\Omega.m}$).



Considérons une section droite S du fil, constituée d'éléments de surface $\overrightarrow{\mathrm{dS}}$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \mathrm{dS}\,\overrightarrow{u_x}$. Calculons le flux de $\overrightarrow{\jmath}$ à travers S,

$$\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{w}}}\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}$$

Comme $\qquad \mathrm{I} = \displaystyle\iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}} \qquad$ et $\qquad \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;\mathrm{V} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{L_w}}\,\overrightarrow{u_x}$

il vient
$$\mathrm{I} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{w}}}\,\frac{\mathrm{US}}{\mathrm{L_w}}$$

Or, $\qquad \mathrm{R_w} = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}} \qquad$ et $\qquad \mathrm{S} = \dfrac{\pi {d_{\mathrm{w}}}^2}{4}$

d'où
$$\boxed{\mathrm{R_w} = \frac{4\,\rho_{\mathrm{w}}\mathrm{L_w}}{\pi {d_{\mathrm{w}}}^2}}$$

La puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{j}}$ dissipée par effet Joule dans le fil s'écrit

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{j}} = \mathrm{R_w I^2} = \frac{4\,\rho_{\mathrm{w}}\mathrm{L_w}\,\mathrm{I}^2}{\pi {d_{\mathrm{w}}}^2}}$$

Divisons les deux membres de cette expression par le volume $\mathrm{L_w}\pi {d_{\mathrm{w}}}^2/4$ du fil,

$$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{v}} = \frac{16\,\rho_{\mathrm{w}}\mathrm{I}^2}{\pi^2 {d_{\mathrm{w}}}^4}}$$

2 Notons $\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{q}}}$ le **vecteur densité de courant thermique volumique** (dont la norme s'exprime en $\mathbf{W/m^2}$), T la température en kelvins et λ la **conductivité thermique** du matériau (qui s'exprime en $\mathbf{W/(K.m)}$). La loi de Fourier s'écrit

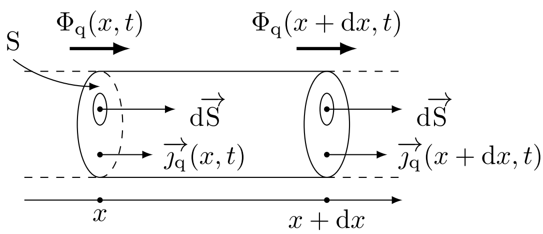
$$\boxed{\overrightarrow{\jmath_{\mathrm{q}}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;\mathrm{T}}$$

C'est une loi phénoménologique, puisqu'elle a été **proposée** par Fourier **en se basant sur des expériences**.

La température est homogène sur chaque section donc **la température dépend des coordonnées x et t seulement**. Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{j_{\rm q}} = -\lambda \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\, \overrightarrow{u_x}}$$

Considérons la tranche de fil située entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$,



Notons $\mathrm{U}(t)$ l'énergie interne de cette tranche de fil à l'instant t. Le premier principe appliqué à ce système immobile dans le référentiel d'étude, entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, s'écrit

$$\mathrm{U}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{U}(t) = \delta\mathrm{Q} + \delta\mathrm{W}$$

avec
$$\mathrm{U}(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{U}(t) = \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mu_{\rm w} c_{\rm w}\, \mathrm{S}\mathrm{d}x \frac{\partial \mathrm{T}_{\rm w}}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

De plus, en présence de conduction thermique seule,

$$\delta\mathrm{W} = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta\mathrm{Q} = \Phi_{\rm q}(x,t)\,\mathrm{d}t - \Phi_{\rm q}(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t$$

où $\Phi_{\rm q}$ est le flux thermique compté positivement lorsqu'il est orienté dans le sens des x croissants. Comme

$$\Phi_{\rm q}(x,t) = \iint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{j_{\rm q}}(x,t)\cdot \mathrm{dS}\,\overrightarrow{u_x} = j_{\rm q}(x,t)\mathrm{S}$$

il vient
$$\delta\mathrm{Q} = j_{\rm q}(x,t)\mathrm{S}\,\mathrm{d}t - j_{\rm q}(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{S}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\partial j_{\rm q}}{\partial x}(x,t)\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

ainsi
$$\delta\mathrm{Q} = \lambda_{\rm w} \frac{\partial^2 \mathrm{T}_{\rm w}}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

où l'on a utilisé la loi de Fourier. En remplaçant dans chaque membre du premier principe, il vient

$$\mu_{\rm w} c_{\rm w}\, \mathrm{S}\mathrm{d}x \frac{\partial \mathrm{T}_{\rm w}}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t = \lambda_{\rm w} \frac{\partial^2 \mathrm{T}_{\rm w}}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Simplifions pas $\mathrm{S}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$:
$$\boxed{\mu_{\rm w} c_{\rm w} \frac{\partial \mathrm{T}_{\rm w}}{\partial t} = \lambda_{\rm w} \frac{\partial^2 \mathrm{T}_{\rm w}}{\partial x^2}}$$

3 D'après l'équation (1),
$$[h] = \frac{[\dot{\mathrm{Q}}_{\rm f}]}{[\mathrm{T}][\mathrm{S}]}$$

donc h s'exprime en $\mathbf{W/(K.m^2)}$.

Dans un courant d'air, on ressent une sensation de fraîcheur, cela traduit que le coefficient $\boldsymbol{h}$ du transfert thermique conducto-convectif **augmente lorsque V augmente**. Dans ce cas, les transferts thermiques du fil vers le fluide étant plus importants, la température $\mathbf{T_w}$ du fil **tend plus rapidement vers $\mathbf{T_f}$**.