X/ENS Maths A MP 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) et par Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet traite principalement des applications p-linéaires alternées définies sur un espace vectoriel de dimension finie d, sans que l'on suppose $d = p$, ce qui généralise en quelque sorte les notions de déterminant et de volume.

- Dans la partie I, on construit des familles orthonormées intéressantes pour des sous-espaces vectoriels, qui permettent de les caractériser en utilisant les déterminants des matrices de Gram définies par
$$\mathrm{Gram}(u, v)_{i,j} = \langle u_i \, , \, v_j \rangle$$
- Dans la partie II, on s'intéresse à $\mathscr{A}_p(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications p-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension d. On y étudie plusieurs propriétés et exemples donnés par les matrices de Gram avant d'y définir la notion de p-volume d'une famille de vecteurs.
- La partie III construit, à l'aide d'une base orthonormée de E, un produit scalaire sur $\mathscr{A}_p(\mathrm{E}, \mathbb{R})$, qui se révèle indépendant de la base orthonormée de E initialement choisie.
- Enfin, la partie IV étudie la p-ième grassmannienne de E, c'est-à-dire de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p, orientés par le choix d'une base. On y introduit une injection de cette grassmannienne vers la sphère unité de l'espace euclidien $\mathscr{A}_p(\mathbb{R})$ afin de munir la grassmannienne d'une topologie naturelle, dont on finit par étudier la compacité ainsi que la connexité par arcs.

Ce sujet de difficulté inégale mais dans l'ensemble abordable fait principalement appel au programme de mathématiques de première année. Hormis un soupçon de topologie au tout début et à la fin, seule l'algèbre linéaire et les espaces euclidiens sont utilisés. Bien qu'intéressant par les résultats établis, il ne constitue pas vraiment un bon sujet pour réviser le programme en fin d'année.

Indications

Partie I

1.a La sphère unité de V et celle de V′ sont compactes et $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ est bilinéaire en dimension finie.

2 Raisonner par récurrence sur k. Pourquoi suffit-il de montrer que $\langle u_k\,,\,u'_k \rangle \geqslant 1$? Se rappeler la définition de u et u'.

3.b La borne supérieure définissant u et u' étant un maximum, on pourra utiliser la condition nécessaire d'extrema d'une fonction réelle.

3.c Que vaut $(\mathrm{F}+\mathrm{G})^{\perp}$ dans un espace euclidien ?

4.a Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et montrer que $\langle u_k\,,\,u'_k \rangle > 0$ pour tout entier k.

4.c Quid du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Partie II

5.a Utiliser la formule sommatoire du déterminant.

6.a Se rappeler du résultat de la question 5.b.

7.a Utiliser la p-linéarité pour développer l'expression sous forme d'une somme à p indices.

7.b Raisonner par double implication et utiliser la question 7.a.

7.c Montrer que $\mathrm{Gram}(e, e)$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives.

8.b Écrire $e_1 = \mathrm{pr}(e_1) + h$ avec $h \in \mathrm{Vect}\,(e_2, \ldots, e_p)$ puis utiliser un calcul par blocs.

8.c Que dire si un vecteur et son projeté orthogonal ont la même norme ?

9.a Utiliser la question 8.a.

Partie III

10.a Décomposer des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ dans une base orthonormée de E et utiliser la p-linéarité pour écrire $\omega(u_1, \ldots, u_p)$ sous forme d'une somme à multi-indice. Le caractère alterné montre que la somme peut ne porter que sur un ensemble d'indices deux à deux distincts. Partitionner ces indices en utilisant $\mathcal{I}_p$ et les réécrire en utilisant des permutations.

10.b Que dire de matrices de Gram pour des familles orthonormées ? Pour la dimension, on pourra mettre en bijection $\mathcal{I}_p$ est un ensemble de combinaisons.

10.c Utiliser le déterminant.

11.a Penser à la question 10.a et à la symétrie de Ω_p.

12 Que dire d'une matrice de passage d'une base orthonormée à une autre ? Se rappeler le résultat de la question 10.a.

13.a Penser aux questions 4.c et 7.a et calculer de deux façons $\Omega_p(u)(u')$ pour les familles u, u' de la question 1.b.

13.b Montrer que, nécessairement, l'application Ψ est constante sur l'ensemble des bases orthonormées directes de (V, C).

14.a Montrer que $\Psi(\mathrm{V}, \mathrm{C}) = \Omega_p(b)$ pour toute base orthonormée $b \in \mathrm{C}$, c'est-à-dire directe pour l'orientation C.

14.b On est en dimension finie et il ne reste donc plus qu'à montrer que $\Psi(\widetilde{\mathrm{Gr}}(p, \mathrm{E}))$ est fermée. Utiliser $\Psi(\mathrm{V}, \mathrm{C}) = \Omega_p(b)$ pour tout $b \in \mathrm{C}$ base orthonormée.

15 Le cas $p = d$ conduit à se poser la question de la connexité d'une paire dans un espace vectoriel normé.

Pour le cas $p \leqslant d-1$, utiliser les familles u, u' de la question 1.b et le fait que, si u est directe pour l'orientation C choisie sur V, alors on obtient $\Psi(\mathrm{V}, \mathrm{C}) = \Omega_p(u)$ et $\Psi(\mathrm{V}, \mathrm{C}) = -\Omega_p(u)$ sinon. Dans le deuxième cas, on pourra se demander comment relier un vecteur $u \in \mathrm{V}$ à $-u$ en utilisant $\mathrm{V}^\perp$.

Dans tout le corrigé, on notera $\mathbb{S}_1(\mathrm{V})$ la sphère unité d'un sous espace vectoriel V de E (pour la norme euclidienne).

Le caractère nommé alterné par l'énoncé est traditionnellement appelée antisymétrie : l'échange de deux vecteurs en argument de l'application p-linéaire change le signe de sa valeur. Cela équivaut au critère pour toute permutation donné par l'énoncé. En effet, l'ensemble S des permutations σ satisfaisant

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \qquad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

contient l'ensemble des transpositions pour la définition de l'antisymétrie donnée ci-dessus. Mais on peut vérifier facilement que cet ensemble est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$, et ce dernier est engendré par les transpositions, donc l'ensemble S est bien $\mathfrak{S}_p$ tout entier (ce qui est la définition de l'énoncé).

Usuellement, on définit plutôt le caractère alterné par le fait que si une famille comporte deux vecteurs égaux, alors la valeur de l'application est nulle en cette famille. Ces deux notions sont équivalentes. Il est en effet facile d'obtenir le caractère alterné à partir de l'antisymétrie : l'échange de deux vecteurs égaux dans la famille ne la modifie pas, mais change le signe de la valeur calculée. On a alors

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

et donc cette valeur est nulle puisque $\mathbb{R}$ est de caractéristique différente de 2. Réciproquement, en supposant le caractère alterné, on développe par linéarité pour les i-ième et j-ième variables :

$$\begin{aligned} 0 &= f(u_1, \dots, u+v, \dots, u+v, \dots, u_p) \\ &= f(u_1, \dots, u, \dots, u, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, v, \dots, u, \dots, u_p) \\ &\quad + f(u_1, \dots, u, \dots, v, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, v, \dots, v, \dots, u_p) \\ &= 0 + f(u_1, \dots, u, \dots, v, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, v, \dots, u, \dots, u_p) + 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Partie I

1.a L'application $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle : \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \to \mathbb{R}$ est bilinéaire entre espaces de dimensions finies donc continue. Les parties $\mathbb{S}_1(\mathrm{V})$ et $\mathbb{S}_1(\mathrm{V}')$ sont fermées et bornées dans un espace de dimension finie, donc sont compactes. Notons $\mathrm{K} = \mathbb{S}_1(\mathrm{V}) \times \mathbb{S}_1(\mathrm{V}')$: c'est un compact par produit fini de compacts. D'après le théorème des bornes atteintes, $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ est bornée et atteint ses bornes sur K, ce qui établit bien que cette borne supérieure est en fait un maximum :

$$\boxed{\exists (u_1, u'_1) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \quad \|u_1\| = \|u'_1\| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{(a,a') \in \mathbb{S}_1(\mathrm{V}) \times \mathbb{S}_1(\mathrm{V}')} \langle a\,,\, a' \rangle = \langle u_1\,,\, u'_1 \rangle}$$

1.b Montrons par récurrence finie que la propriété

$\mathscr{P}(k)$: il existe deux familles orthonormées $u = (u_1, \dots, u_k) \in \mathrm{V}^k$ et $u' = (u'_1, \dots, u'_k) \in (\mathrm{V}')^k$ vérifiant

$$\langle u_k\,,\, u'_k \rangle = \sup \left\{ \langle a\,,\, a' \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in \mathbb{S}_1(\mathrm{V} \cap \{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp) \\ a' \in \mathbb{S}_1(\mathrm{V}' \cap \{u'_1, \dots, u'_{k-1}\}^\perp) \end{array} \right\}$$

est vraie pour tout $k \in [\![1\,; p]\!]$.