Mines Maths 2 MP 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Paul Bonnet (professeur en CPGE) ; il a été relu par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) et Jean Starynkévitch (professeur en CPGE).

Le sujet s'intéresse aux fonctions $f_{\mathrm{A}} : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), t \mapsto \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ où A est une matrice fixée. L'image de f_{A} définit alors un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, qui est un cas particulier de sous-groupe dit à 1 paramètre. L'énoncé s'en sert pour décrire l'espace tangent en l'identité d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ appelé algèbre de Lie, puis pour exprimer la solution d'une équation différentielle vectorielle.

- Dans la partie I, on étudie les propriétés des sous-groupes à 1 paramètre. Il s'agit essentiellement de résultats sur les exponentielles de matrice qui seront exploités dans les deux parties suivantes.
- Ensuite, on démontre la formule de (Lie-)Trotter-Kato permettant de calculer l'exponentielle de la somme de deux matrices qui ne commutent pas. C'est un résultat technique dont l'usage sera fait plus tard.
- En troisième partie, on définit l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé du groupe linéaire réel et on l'identifie à l'espace vectoriel tangent en l'identité à ce sous-groupe dans le cas particulier des groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
- La dernière partie, largement indépendante des trois précédentes, traite du comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle vectorielle $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. On y démontre que ce comportement dépend du signe des parties réelles des valeurs propres de A. Pour cela, on utilise une décomposition de l'espace vectoriel en lien avec le polynôme caractéristique de A.

Ce sujet mélange habilement algèbre, calcul différentiel et fonctions à valeurs vectorielles. Il utilise au fil de l'eau des résultats sur les espaces vectoriels normés sans en faire un sujet d'étude central. De nombreuses questions demandent une bonne part d'autonomie pour justifier rigoureusement chaque étape du raisonnement. Il demande d'établir plusieurs résultats classiques des écrits ou des oraux de concours, parmi lesquels $\|\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\| \leqslant \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|}$, $\det(\mathrm{e}^{\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})}$, une version faible de la décomposition de Dunford d'une matrice, etc. Il s'agit d'un bon sujet de synthèse pour travailler ces différentes notions.

Indications

Partie I

1 Par récurrence sur les sommes partielles.

2 Utiliser l'unicité de la solution à un problème de Cauchy. Remarquer ensuite que si $\mathrm{A} = 0_n$, $\mathrm{e}^{t\mathrm{B}}$ est inversible d'inverse $\mathrm{e}^{-t\mathrm{B}}$.

3 Penser à évaluer l'identité en $t = 0$.

5 Trigonaliser la matrice dans $\mathbb{C}$ et justifier que le résultat est également vrai dans $\mathbb{R}$.

Partie II

6 Exploiter la question 4.

7 Utiliser un développement limité à l'ordre 1 de la fonction h.

8 Remarquer que $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = {\mathrm{Y}_k}^k$.

Partie III

9 Utiliser la question 5.

10 Justifier que $\left(\mathrm{e}^{t\mathrm{M}}\right)^\top = \mathrm{e}^{t\mathrm{M}^\top}$ pour un sens et dériver $f_\mathrm{M} f_{\mathrm{M}^\top}$ pour la réciproque.

11 Utiliser le caractère fermé de G et l'inégalité de Trotter-Kato pour la stabilité de la somme.

12 Interpréter $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}$ comme un changement de base et utiliser le comportement de l'exponentielle par changement de base.

13 Justifier que u est dérivable en 0 puis utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le caractère fermé de G.

15 Travailler avec une matrice triangulaire et expliciter le calcul du déterminant dans ce cas.

17 Utiliser la question 16 pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et dériver $t \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^\top$ en 0 pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Partie IV

18 Identifier le polynôme caractéristique de A puis effectuer une trigonalisation. Utiliser un binôme de Newton pour l'expression de T^k.

19 Utiliser un vecteur propre associé à la valeur propre de A de partie réelle α pour déterminer un vecteur propre de $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ et se ramener à une exponentielle réelle.

20 Penser au théorème de décomposition des noyaux.

21 Il s'agit d'une version faible de la décomposition de Dunford.

22 Utiliser la question 21 et le fait que $f_\mathrm{A} = f_\mathrm{D} f_\mathrm{N}$, que $\|f_\mathrm{A}\| \leqslant \|f_\mathrm{D}\| \|f_\mathrm{N}\|$ et majorer séparément. Conclure en exploitant l'équivalence des normes avec $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

24 Trigonaliser A et utiliser le fait que que l'on connaît la diagonale de l'exponentielle d'une matrice triangulaire pour effectuer un raisonnement par l'absurde.

25 Le théorème de décomposition des noyaux donne la somme directe. Construire des endomorphismes définis suivant la somme directe pour obtenir une décomposition de la forme $\mathrm{A} = \mathrm{A}_s + \mathrm{A}_i + \mathrm{A}_n$ telle que, si $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n$ se décompose comme $\mathrm{X}_s + \mathrm{X}_n + \mathrm{X}_i$ selon $\mathrm{E}_s \oplus \mathrm{E}_n \oplus \mathrm{E}_i$, alors $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}$ admet pour décomposition selon la même somme directe $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}_s}\mathrm{X}_s + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}_n}\mathrm{X}_n + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}_i}\mathrm{X}_i$.

26 Procéder par double inclusion en exploitant la démarche de la question 25 pour chacune d'elle. Pour la réciproque, introduire une matrice $\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_n$ pour une valeur bien choisie de μ.

I. Questions préliminaires

1 On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \quad \mathrm{AB}^k = \mathrm{B}^k\mathrm{A}$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie. En effet, $\mathrm{B}^0 = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{AB}^0 = \mathrm{AI}_n = \mathrm{A} = \mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{B}^0\mathrm{A}$.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(k)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}^{k+1} &= \mathrm{AB}^k\mathrm{B} && \text{(associativité)}\\
&= \mathrm{B}^k\mathrm{AB} && \text{(hyp. de récurrence)}\\
&= \mathrm{B}^k\mathrm{BA} && \text{(commutativité)}\\
\mathrm{AB}^{k+1} &= \mathrm{B}^{k+1}\mathrm{A} && \text{(associativité)}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{AB}^k = \mathrm{B}^k\mathrm{A}$

Par bilinéarité du produit matriciel

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{B}^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{AB}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{B}^k\mathrm{A}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\mathrm{B}^k}{k!}\right)\mathrm{A}$$

Comme le produit matriciel est une application bilinéaire entre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont de dimensions finies, c'est une application continue. Ainsi, par passage à la limite quand $m \to +\infty$, le terme de gauche converge vers Ae^{B} alors que celui de droite converge vers $\mathrm{e}^{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ d'où,

$$\boxed{\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \Longrightarrow \mathrm{Ae}^{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}\mathrm{A}}$$

> La suite de terme général $\sum\limits_{k=0}^{m} \mathrm{B}^k/k!$ est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{B}]$ qui est dimension finie, donc fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par suite, la matrice e^{B} appartient à $\mathbb{K}[\mathrm{B}]$ et il existe alors un polynôme $\mathrm{P(X)} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \mathrm{P(B)}$. La bilinéarité du produit matriciel et le résultat de récurrence ci-dessus entraînent alors que $\mathrm{AP(B)} = \mathrm{P(B)A}$.

2 D'après l'énoncé, f_{A} vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = \mathrm{A}y$ et $f_{\mathrm{A}}(0) = \mathrm{I}_n$ donc f_{A} est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \qquad y'(t) = \mathrm{A}y(t) \\ \qquad\qquad\qquad y(0) = \mathrm{I}_n \end{cases}$$

Remarquons maintenant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f_{\mathrm{A+B}}(t)f_{-\mathrm{B}}(t)$. Les applications $f_{\mathrm{A+B}}$ et f_{A} étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé, $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ par les théorèmes usuels et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f'_{\mathrm{A+B}}(t)f_{-\mathrm{B}}(t) + f_{\mathrm{A+B}}(t)f'_{-\mathrm{B}}(t)\\
&= (\mathrm{A+B})f_{\mathrm{A+B}}(t)f_{-\mathrm{B}}(t) - f_{\mathrm{A+B}}(t)\mathrm{B}f_{-\mathrm{B}}(t)
\end{aligned}$$

Comme A et B commutent, A et A + B également. Ainsi, avec la question 1, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices B et $f_{\mathrm{A+B}}(t)$ commutent aussi. Par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g'(t) &= (\mathrm{A+B})f_{\mathrm{A+B}}(t)f_{-\mathrm{B}}(t) - \mathrm{B}f_{\mathrm{A+B}}(t)f_{-\mathrm{B}}(t)\\
&= (\mathrm{A+B})g(t) - \mathrm{B}g(t)\\
g'(t) &= \mathrm{A}g(t)
\end{aligned}$$

En outre, $g(0) = f_{\mathrm{A+B}}(0) f_{-\mathrm{B}}(0) = \mathrm{I}_n \times \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$. En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie le même problème de Cauchy que } f_{\mathrm{A}} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

L'application $y \mapsto \mathrm{A}y$ étant un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, d'après le théorème de Cauchy linéaire, ce problème de Cauchy admet une unique solution. Il en résulte que $f_{\mathrm{A}} = g = f_{\mathrm{A+B}} f_{-\mathrm{B}}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. En répliquant ce qui précède dans le cas particulier où $\mathrm{A} = 0_n$, on obtient que $f_{\mathrm{B}}(t) \times f_{-\mathrm{B}}(t) = f_{0_n}(t) = \mathrm{I}_n$. On en déduit que $f_{-\mathrm{B}}(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et que son inverse est $f_{\mathrm{B}}(t)$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^{\,t(\mathrm{A+B})} = \mathrm{e}^{\,t\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\,t\mathrm{B}}}$$

3 Remarquons tout d'abord que, comme la fonction f_{A} vérifie sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = \mathrm{A}y$, f est $\mathscr{C}^1$ et vérifie $f_{\mathrm{A}}{}' = \mathrm{A} f_{\mathrm{A}}$. Ainsi, on en déduit par la linéarité de $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$, que $f_{\mathrm{A}}{}'$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $f_{\mathrm{A}} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et

$$f_{\mathrm{A}}{}'' = (\mathrm{A} f_{\mathrm{A}})' = \mathrm{A} f_{\mathrm{A}}{}' = \mathrm{A}(\mathrm{A} f_{\mathrm{A}}) = \mathrm{A}^2 f_{\mathrm{A}}$$

> On peut même prouver par récurrence qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas nécessaire.

Cette remarque s'applique également à f_{B} et $f_{\mathrm{A+B}}$. Ainsi, $f_{\mathrm{A+B}}$ et $f_{\mathrm{A}} \times f_{\mathrm{B}}$ sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R}$. On a alors d'une part,

$$(f_{\mathrm{A+B}})'' = (\mathrm{A} + \mathrm{B})^2 f_{\mathrm{A+B}}$$

d'autre part, comme f_{A} et f_{B} commutent, avec la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} (f_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{B}})'' &= f_{\mathrm{A}}{}'' f_{\mathrm{B}} + 2 f_{\mathrm{A}}{}' f_{\mathrm{B}}{}' + f_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{B}}{}'' \\ &= \mathrm{A}^2 f_{\mathrm{A}} f_{\mathrm{B}} + 2\mathrm{A} f_{\mathrm{A}} \mathrm{B} f_{\mathrm{B}} + f_{\mathrm{A}} \mathrm{B}^2 f_{\mathrm{B}} \end{aligned}$$

En évaluant cette identité en $t = 0$, avec $f_{\mathrm{A+B}}(0) = f_{\mathrm{A}}(0) = f_{\mathrm{B}}(0) = \mathrm{I}_n$, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathrm{A} + \mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2 + 2\mathrm{AB} + \mathrm{B}^2 \ \text{donc}\ \ & \mathrm{A}^2 + \mathrm{AB} + \mathrm{BA} + \mathrm{B}^2 = \mathrm{A}^2 + 2\mathrm{AB} + \mathrm{B}^2 \\ \text{donc}\ \ & \mathrm{BA} = \mathrm{AB} \end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{\text{Les matrices A et B commutent.}}$

4 Dans cette question, on utilisera les propriétés (N1) et (N2) vérifiées par la norme de l'énoncé. Montrons tout d'abord par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(m) : \quad \|\mathrm{A}^m\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^m$$

est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

- <u>$\mathscr{P}(0)$</u> est vraie car $\|\mathrm{A}^0\| = \|\mathrm{I}_n\| = \|\mathrm{A}\|^0$ puisque d'après la propriété (N1), on a $\|\mathrm{I}_n\| = 1$.
- <u>$\mathscr{P}(m) \Longrightarrow \mathscr{P}(m+1)$</u> : soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(m)$ est vraie.

  Alors,
  $$\begin{aligned} \|\mathrm{A}^{m+1}\| &= \|\mathrm{A}^m \mathrm{A}\| \\ &\leqslant \|\mathrm{A}^m\| \; \|\mathrm{A}\| && \text{(d'après (N2))} \\ &\leqslant \|\mathrm{A}\|^m \; \|\mathrm{A}\| && (\mathscr{P}(m)) \\ \|\mathrm{A}^{m+1}\| &\leqslant \|\mathrm{A}\|^{m+1} \end{aligned}$$

- <u>Conclusion</u> : $\forall m \in \mathbb{N} \qquad \|\mathrm{A}^m\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^m$