Mines Physique 1 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Le sujet commence par une question sur la durée requise pour encoder en morse une page de texte. C'est le prétexte pour introduire les télécommunications, thème central du sujet.

- Dans la partie I, on s'intéresse à la propagation d'onde de courant et de tension dans un câble coaxial. Dans une première sous-partie, on étudie quelques conséquences des équations dites des télégraphistes. C'est l'occasion de déterminer une relation de dispersion et d'étudier la dispersion et l'atténuation. Ensuite, on aborde le modèle du câble coaxial vu en cours, puis on le complète en prenant en compte l'atténuation. Cette partie s'appuie sur des données numériques relatives à un câble de bonne qualité, dont on parvient à expliquer les caractéristiques grâce au modèle adopté.
- La deuxième partie, plus courte, cherche à rendre compte quantitativement de la possibilité de transmettre un signal électromagnétique « par-delà l'horizon » en utilisant le phénomène d'écho ionosphérique. L'ionosphère, qui est une couche importante de la haute atmosphère, peut en effet être modélisée comme un plasma peu dense qui peut, sous certaines conditions, réfléchir totalement une onde électromagnétique. Cette partie reste très proche du cours sur les plasmas peu denses.

Cette épreuve de longueur tout à fait raisonnable présente un ensemble cohérent centré sur les ondes. De nombreuses questions sont très accessibles. Notons également la présence de quelques applications numériques, à réaliser sans calculatrice mais qui ne présentent pas de difficulté majeure.

Indications

Partie I

2 Raisonner d'abord sur la dimension avant de donner l'unité. Ne pas chercher l'expression de la dimension à partir des dimensions fondamentales mais introduire la dimension d'une impédance/résistance. Commencer par déterminer la dimension de R_0 et déduire celles des autres grandeurs ensuite.

5 La vitesse de phase est le rapport entre la pulsation et la partie réelle du vecteur d'onde.

6 La puissance est proportionnelle à la tension au carré : comment évolue $u(z,t)$ quand z augmente ?

7 Rappelons qu'un tronçon élémentaire de câble coaxial de longueur $\mathrm{d}z$ est modélisé par une bobine élémentaire d'inductance $\ell_\mathrm{u}\mathrm{d}z$ sur un fil et un condensateur élémentaire entre les deux fils de capacité $c_\mathrm{u}\,\mathrm{d}z$.

9 Pour retrouver l'expression de l'impédance caractéristique, chercher des solutions sous la forme d'une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des z croissants.

10 L'énoncé permet de traduire l'expression de l'onde de tension utilisée en l'écrivant sous la forme $\overline{u}_+ = \overline{\mathrm{U}}_+\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - kz)}$. Traduire la condition en limite en $z = 0$ avec l'onde totale $\overline{u}_+ + \overline{u}_-$.

11 Écrire u_s et u_p en notation complexe. Exprimer $\overline{u}$ de deux façons : avec $\overline{u}_\mathrm{s}$ et $\overline{u}_\mathrm{p}$ d'une part et avec $\overline{u}_+$ et $\overline{u}_-$ d'autre part puis identifier. La grandeur ρ correspond au rapport des modules des amplitudes complexes de $\overline{u}_\mathrm{s}$ et $\overline{u}_\mathrm{p}$.

12 Pour établir l'équation d'onde, utiliser la même démarche qu'à la question 7. On obtient, comme résultat intermédiaire, des équations analogues aux équations des télégraphistes données dans l'énoncé : identifier les constantes pour obtenir rapidement la distance d'atténuation à partir de la question 6.

14 Pour déterminer l'onde réfléchie, passer en notation complexe et traduire les conditions aux limites en $z = 0$ à savoir la continuité de la tension et la loi des nœuds.

Partie II

18 Pour une démonstration complète, il faut écrire l'égalité entre le champ électrique dans le vide (ondes incidente et réfléchie) et dans l'ionosphère. Si on ne tient pas compte de l'onde réfléchie, le résultat est bien le même mais il n'est pas rigoureux.

19 Injecter les résultats de la question précédente dans la relation de dispersion. La propagation n'est possible que si ${k'_z}^2 > 0$.

20 Faire un schéma en supposant un rebond sur l'ionosphère de la part de l'onde émise. En déduire l'expression de $\tan\theta$ en fonction de d et H.

22 Adopter la notation complexe et écrire les équations de Maxwell. Éliminer le champ électrique pour obtenir l'équation de dispersion.

23 La puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule est $\overrightarrow{\mathrm{J}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{E}}$. Comment est le vecteur d'onde dans le plasma dans le cas d'un écho ionosphérique ? Pour déterminer la puissance moyenne transmise à travers le plasma dans le cas d'un écho ionosphérique, il faut analyser le vecteur de Poynting moyen.

I. Le fil du télégraphe

1 Attendu que $2^5 = 32$, 5 bits ne permettent de coder que les 32 caractères de l'alphabet cyrillique, ce qui est insuffisant pour pouvoir coder en plus la ponctuation et les chiffres. En revanche, vu que $2^6 = 64$, **6 bits** sont suffisants pour coder un caractère (lettre, chiffre, ponctuation ou espace) d'un document écrit en cyrillique. En effet, pour coder N caractères en binaire sur n bits, avec n minimal, il faut que n vérifie

$$2^{n-1} + 1 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 2^n$$

À raison de 3 bits/s, il faut 2 s pour coder un caractère. Estimons le nombre de caractères dans une page de texte. En utilisant la page 2 de l'énoncé, on dénombre environ 40 lignes. En analysant les premières lignes de cette page, on peut retenir une moyenne de 90 caractères par ligne, soit 3 600 caractères pour une page. On en déduit qu'il faut environ **2 h** pour transmettre en morse une page de texte.

> Il est important d'expliquer comment on détermine le nombre de caractères mais il ne faut pas perdre de temps à faire une analyse trop précise : en effet, c'est l'ordre de grandeur qui est utile et pour cela, que l'on retienne 30, 40 ou 50 lignes d'une part, 80, 90 ou 100 caractères par ligne d'autre part ne change rien à l'ordre de grandeur. L'avantage des valeurs retenues ici, c'est que le calcul pour obtenir la durée de transmission est instantané.
>
> La capacité des cartouches de toner en terme de pages de texte est calculée avec 4 000 caractères par page environ : l'ordre de grandeur est bon.

2 On a les équations des télégraphistes écrites sous la forme

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{R}_0}{\chi_0}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\mathrm{R}_0}{\ell_0}i \quad (\mathbf{1}) \qquad \text{et} \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{R}_0\,\chi_0}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (\mathbf{2})$$

On note [X] la dimension de la grandeur X et L, M, T les dimensions de base que sont les longueur, masse et temps. Sachant que le rapport d'une tension par une intensité a la dimension d'une impédance, notée [Z], on obtient de l'équation (**1**)

$$\left[\frac{\mathrm{R}_0}{\ell_0}\right] = \left[\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial z}\right] = [\mathrm{Z}]\,\mathrm{L}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\mathrm{R}_0}{\chi_0}\right] = \left[\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial u}{\partial z}\right] = [\mathrm{Z}]\,\mathrm{T}\,\mathrm{L}^{-1}$$

et de l'équation (**2**) $$[\mathrm{R}_0\,\chi_0] = [\mathrm{Z}]\,\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-1}$$

Comme $\mathrm{R}_0\,\chi_0 \times \mathrm{R}_0/\chi_0 = {\mathrm{R}_0}^2$, on déduit que R_0 a la dimension d'une impédance donc **$\mathbf{R_0}$ s'exprime en ohms**. Grâce à la 1^{re} relation, on détermine que ℓ_0 a la dimension d'une longueur donc **$\boldsymbol{\ell_0}$ s'exprime en m**. Enfin, via la 3^e relation, on conclut que χ_0 a la dimension d'une vitesse donc **$\boldsymbol{\chi_0}$ s'exprime en m.s^{-1}**.

3 Le rôle du fil de « retour », absent dans une configuration à un seul fil, est joué par le sol. Le modèle bifilaire est donc toujours justifié.

> Ce n'est pas la seule situation où il semble manquer un fil. On peut citer deux autres exemples :
>
> - Pour une dynamo de vélo, il n'y a, en général, qu'un seul fil car c'est le cadre qui sert de masse.
> - Dans le cadre de la transmission d'énergie électrique par courant triphasé, il n'y a que trois fils alors qu'il devrait y en avoir quatre. Le 4^e fil (le neutre) est en fait inutile si le réseau est équilibré puisqu'alors la somme des courants est toujours nulle.

4 Pour obtenir l'équation vérifiée par u, il faut éliminer i des équations des télégraphistes. Pour cela, on calcule la dérivée partielle de l'équation (**2**) par rapport au temps et la dérivée partielle de l'équation (**1**) par rapport à z. Il vient

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 i}{\partial t\,\partial z} = \dfrac{1}{\mathrm{R}_0\,\chi_0}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ -\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\mathrm{R}_0}{\chi_0}\dfrac{\partial^2 i}{\partial z\,\partial t} + \dfrac{\mathrm{R}_0}{\ell_0}\dfrac{\partial i}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{R}_0}{\chi_0}\dfrac{\partial^2 i}{\partial z\,\partial t} - \dfrac{1}{\ell_0\,\chi_0}\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

En utilisant le lemme de Schwarz qui permet de permuter l'ordre des dérivations partielles et en remplaçant dans la 2$^{\text{e}}$ relation ci-dessus, il vient

$$\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{{\chi_0}^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{1}{\ell_0\,\chi_0}\dfrac{\partial u}{\partial t}}$$

> On peut vérifier les dimensions de χ_0 et ℓ_0 déterminées à la question 2.

Pour déterminer la relation de dispersion, on cherche une solution sous forme d'une onde sinusoïdale progressive $\overline{u}(z,t) = \overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - \overline{k} z)}$ et on injecte dans l'équation de propagation. On obtient

$$-\overline{k}^2\,\overline{u} = -\left(\dfrac{\omega}{\chi_0}\right)^2\overline{u} + \dfrac{\mathrm{i}\,\omega}{\ell_0\,\chi_0}\,\overline{u}$$

On en déduit la relation de dispersion en divisant par $\overline{u}$:

$$\boxed{\overline{k}^2 = \left(\dfrac{\omega}{\chi_0}\right)^2 - \dfrac{\mathrm{i}\,\omega}{\ell_0\,\chi_0}}$$

5 Par définition de la vitesse de phase v_φ, on a

$$v_\varphi = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}\,(\overline{k})}$$

On a donc besoin de l'expression de la partie réelle du vecteur d'onde en fonction de la pulsation. On procède à un développement limité à l'ordre le plus bas non nul en la perturbation. Ainsi, d'après la relation de dispersion réécrite sous la forme

$$\overline{k}^2 = \left(\dfrac{\omega}{\chi_0}\right)^2\left[1 - \dfrac{\mathrm{i}\,\chi_0}{\ell_0\,\omega}\right]$$

on tire, par développement limité

$$\overline{k} = \left(\dfrac{\omega}{\chi_0}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{i}\,\chi_0}{\ell_0\,\omega}\right)$$

d'où
$$\boxed{v_\varphi = \chi_0}$$

La vitesse de phase est une constante donc, à cet ordre du développement, **il n'y a pas de dispersion**.

> Insistons : il n'y a pas de dispersion si et seulement si $\dfrac{\chi_0}{\ell_0\omega} \ll 1$.

6 Analysons l'évolution de $u(z,t)$ quand z augmente, c'est-à-dire dans le sens de la propagation. Puisque l'on s'intéresse à des grandeurs énergétiques, il convient de passer en notation réelle. Comme

$$\overline{k} = \left(\dfrac{\omega}{\chi_0}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{i}\,\chi_0}{\ell_0\,\omega}\right)$$

Il vient
$$\overline{u}(z,t) = \overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{Im}\,(\overline{k})\,z}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - \mathrm{Re}\,(\overline{k})\,z)}$$