Mines Maths 2 PSI 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Bosch (professeur en CPGE) ; il a été relu par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce problème porte sur l'étude des noyaux de type positif. Ces noyaux sont des applications $\mathrm{K} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω désignant un ensemble quelconque) pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega^n$, la matrice $(\mathrm{K}(x_i, x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique à valeurs propres positives. Cela généralise donc la notion de matrice symétrique réelle à spectre positif (correspondant au cas où Ω est fini) en dimension infinie.

- La première partie est consacrée à la démonstration de résultats préliminaires qui serviront tout au long du problème : on démontre le théorème de Fubini, qui permet de manipuler des intégrales doubles, et on généralise le théorème des sommes de Riemann à des fonctions de plusieurs variables.
- La notion de noyau de type positif (en abrégé NTP) est introduite dans la deuxième partie. On y démontre une autre représentation de ces NTP dans deux cas particuliers : K est un NTP si, et seulement si, il peut s'écrire sous la forme $\mathrm{K}(x, y) = \langle \varphi(x) \mid \varphi(y) \rangle_{\mathrm{H}}$ où H est un espace préhilbertien et $\varphi : \Omega \to \mathrm{H}$ est une application.
- Dans la dernière partie, on commence par étudier certaines propriétés générales d'un opérateur (c'est-à-dire d'une application linéaire) à noyau de type positif : on montre que cet opérateur est continu, symétrique, et admet une famille orthonormale de vecteurs propres, tous associés à des valeurs propres positives (généralisant en quelque sorte le théorème spectral). On étudie ensuite sur un exemple la décomposition spectrale d'un opérateur à noyau de type positif, et on démontre sur ce même exemple un résultat appelé formule de la trace.

Dans ce sujet, on aborde les notions suivantes : espaces vectoriels normés en dimension finie et infinie, espaces préhilbertiens et euclidiens, intégrales à paramètre, suites et séries, équations différentielles.

Le sujet est assez calculatoire. On y retrouve des questions classiques où l'on applique les principaux théorèmes du programme : les théorèmes de continuité et de dérivation des intégrales à paramètre, le théorème spectral, etc., mais également des questions plus difficiles qui sont à la limite du programme de PSI.

Indications

Quelques résultats préliminaires

5 Avec la question 4, reconnaître l'intégrale $\displaystyle\int_a^x \psi'(u)\,\mathrm{d}u$ et appliquer le théorème fondamental de l'analyse.

6 Utiliser le fait que $\mathrm{S}_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\int_{t_\ell}^{t_{\ell+1}} f(u_k,t_\ell)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.$

Noyaux de type positif

9 Considérer l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice symétrique $\mathrm{Cov}_{\mathrm{K}}(x_1,\ldots,x_n)$ puis diagonaliser f dans une base orthonormale de vecteurs propres pour introduire un endomorphisme symétrique g tel que $g^2 = f$.

12 Montrer que si $u_{\mathrm{K}} = u_{\mathrm{K}'}$, alors pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $\mathrm{K}_x - \mathrm{K}'_x$ est orthogonal à tout élément de E.

Opérateurs à noyau

13 Ne pas oublier de justifier que $x \mapsto \langle \mathrm{K}_x \mid f\rangle$ est bien élément de E puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer la continuité de u_{K}.

14 Utiliser le résultat de la question 5 pour montrer que u_{K} est symétrique.

15 Utiliser la question 6 et les notations qui la précède puis exprimer à l'aide de la question 1 la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}\mathrm{K}(u_k,t_\ell)f(u_k)f(t_\ell)$$

16 Montrer l'unicité et l'existence séparément. Pour dériver $u_{\mathrm{K}}(f)$, appliquer la relation de Chasles à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \min\,(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

17 Raisonner par analyse et synthèse : supposer que f est un vecteur propre de u_{K} de valeur propre associée $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et trouver une équation différentielle linéaire dont f est solution.

18 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(x,t)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

19 Développer $\|\mathrm{K}_x - p_n(\mathrm{K}_x)\|_2{}^2$ et écrire $p_n(\mathrm{K}_x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\langle \mathrm{K}_x \mid e_k\rangle e_k$.

20 Montrer que $u_{\mathrm{K}}(f)(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\langle e_k \mid f\rangle e_k(x) = \langle \mathrm{K}_x - p_n(\mathrm{K}_x) \mid f\rangle$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

21 Montrer que la série de fonctions $\sum \lambda_k\langle e_k \mid f\rangle e_k$ converge normalement sur $[\,0\,;1\,]$ puis utiliser le fait que $\|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty$.

22 Ne pas oublier de montrer que K' est continu sur $[\,0\,;1\,]\times[\,0\,;1\,]$. Démontrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, la suite

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e_k(x)e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge pour la norme $\|\ \|_2$ et utiliser à nouveau le fait que $\|\ \|_2 \leqslant \|\ \|_\infty$.

Quelques résultats préliminaires

1 Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; notons $\mathrm{X}^\top \mathrm{A} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$. Pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$, on a

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j}$$

donc
$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i,j} x_j$$

En permutant ces deux sommes finies, on obtient alors

$$\boxed{\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j}$$

> On identifie ici une matrice de type $(1,1)$ à un scalaire. La matrice $\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X}$ est en effet de type $(1,1)$ car $\mathrm{X}^\top$ est de type $(1,n)$, A est de type (n,n) et X est de type $(n,1)$.

2 Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. La matrice A étant symétrique réelle, d'après le théorème spectral, le spectre de A est contenu dans $\mathbb{R}$ (et A est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Montrons que λ est positif (ou nul). Considérons un vecteur propre de A

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

associé à la valeur propre λ. Puisque A est une matrice symétrique (réelle) positive, on a

$$\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top \lambda \mathrm{X} = \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X} = \lambda \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 \geqslant 0$$

Comme X est un vecteur propre, X est non nul, donc la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} {x_k}^2$ est strictement positive et on en déduit $\lambda \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres d'une matrice de } \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ sont des réels positifs ou nuls.}}$$

3 Soit $x \in [\,a\,; b\,]$. La fonction f est continue sur $[\,a\,; b\,] \times [\,c\,; d\,]$ qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$; donc d'après le théorème des bornes, la fonction f est bornée sur $[\,a\,; b\,] \times [\,c\,; d\,]$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (u,t) \in [\,a\,; b\,] \times [\,c\,; d\,] \qquad |f(u,t)| \leqslant \mathrm{M}$$

On applique maintenant le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- Pour tout $t \in [\,c\,; d\,]$, $u \mapsto f(u,t)$ est continue par morceaux sur $[\,a\,; x\,]$.
- Pour tout $u \in [\,a\,; x\,]$, $t \mapsto f(u,t)$ est continue sur $[\,c\,; d\,]$.
- La fonction $h : [\,a\,; x\,] \to \mathbb{R}_+$ constante égale à M est positive, continue (donc continue par morceaux), intégrable sur $[\,a\,; x\,]$ et l'on a $|f(u,t)| \leqslant h(u)$ pour tout $(u,t) \in [\,a\,; x\,] \times [\,c\,; d\,]$.

La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u$ est donc continue sur $[\,c\,;d\,]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [\,a\,;b\,]\text{, la fonction } t \mapsto \varphi(x,t) \text{ est continue sur } [\,c\,;d\,].}$$

4 Appliquons cette fois le théorème de dérivation des intégrales à paramètre à la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$.

- Pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,c\,;d\,]$ car continue d'après la question précédente.
- Pour tout $t \in [\,c\,;d\,]$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,]$ car c'est la primitive s'annulant en a de la fonction continue $x \mapsto f(x,t)$.
- Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Pour tout $t \in [\,c\,;d\,]$, on a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$. La fonction f étant continue sur $[\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$, en particulier $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,c\,;d\,]$.
- Pour tout $(x,t) \in [\,a\,;b\,] \times [\,c\,;d\,]$, on a
$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = |f(x,t)| \leqslant \mathrm{M}$$
où M est le majorant de $|f|$ obtenu dans la question précédente. La fonction constante $t \mapsto \mathrm{M}$ est de plus intégrable sur $[\,c\,;d\,]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } \psi : x \mapsto \displaystyle\int_c^d \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t \text{ est donc de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [\,a\,;b\,] \text{ et}\\[2ex] \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \psi'(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\end{array}}$$

5 Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. D'une part,
$$\psi(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$$
D'autre part, en utilisant le résultat de la question 4 et le théorème fondamental de l'analyse, on obtient
$$\int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u = \int_a^x \psi'(u)\,\mathrm{d}u = \psi(x) - \psi(a)$$
Or
$$\psi(a) = \int_c^d \varphi(a,t)\,\mathrm{d}t$$
et
$$\forall t \in [\,c\,;d\,] \qquad \varphi(a,t) = \int_a^a f(u,t)\,\mathrm{d}u = 0$$
d'où $\psi(a) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \int_a^x \left(\int_c^d f(u,t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u = \int_c^d \left(\int_a^x f(u,t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t}$$