

Centrale Physique 1 PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hector Abel (ENS Cachan) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Émilie Frémont (professeur en CPGE).

Les écoulements dans des lames de savon permettent de modéliser des écoulements bidimensionnels que l'on retrouve dans de nombreux autres domaines, en géophysique par exemple. La mécanique des fluides, mais également les interférences en surface, sont utilisées pour aborder la question de ces écoulements tourbillonnaires plans.

- La première partie reprend les points importants du cours sur l'interféromètre de Michelson. Les résultats sont ensuite appliqués à l'étude des franges d'interférence sur une lame de savon.
- La deuxième partie s'intéresse à l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un écoulement bidimensionnel. On y introduit le vecteur vorticité $\vec{\Omega}$.
- La troisième partie commence par traiter de la diffusion d'une onde électromagnétique dans un milieu métallique. On effectue ensuite l'analogie entre la pénétration de l'onde électromagnétique dans le métal et la diffusion de quantité de mouvement dans la couche limite pour un fluide visqueux au contact d'une plaque oscillante. Enfin, on s'intéresse au problème de la stationnarité de tourbillons dans un fluide visqueux mis en mouvement par un cylindre oscillant à basse fréquence.
- Finalement, la quatrième partie introduit le nombre de Strouhal dans les allées de von Kármán.

Ce sujet aborde beaucoup de points du programme de PC dans les parties I, II et III. Bien que centré sur l'écoulement dans une lame de savon, l'énoncé comporte également des questions sur l'interféromètre de Michelson et sur l'électromagnétisme dans le cadre de l'ARQS. Il constitue ainsi un bon sujet de révision pour évaluer ses connaissances dans ces domaines très classiques. Les parties traitant de la mécanique des fluides sont plus calculatoires et demandent quelques prises d'initiative.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Utiliser le théorème de Malus.
- 8 Calculer la différence de marche δ en tenant compte de l'hypothèse sur l'angle d'incidence.
- 10 Étudier l'évolution de l'angle α du coin d'air en fonction de z et comparer au profil des franges.
- 11 Tracer $\ln e(z)$ en fonction de $\ln(H - z)$.

Partie II

- 14 Partir de la seconde expression de l'équation de Navier-Stokes et calculer son rotationnel.
- 15 Utiliser l'hypothèse de fluide incompressible.

Partie III

- 17 Pour calculer la racine carrée complexe, remplacer i par $\exp(i\pi/2)$.
- 19 Calculer la puissance volumique moyenne dissipée par le métal. Intégrer sur le volume de section S et d'extension infinie selon (Oz) .
- 28 Considérer le cas limite $d = \delta$.
- 33 Comparer les termes $\eta \vec{\Delta} \vec{v}$ et $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.
- 36 Calculer la moyenne temporelle de l'équation pour éliminer tous les termes sauf celui en $\langle v_p^2 \rangle$ et celui en $\langle v_s \rangle$.

Partie IV

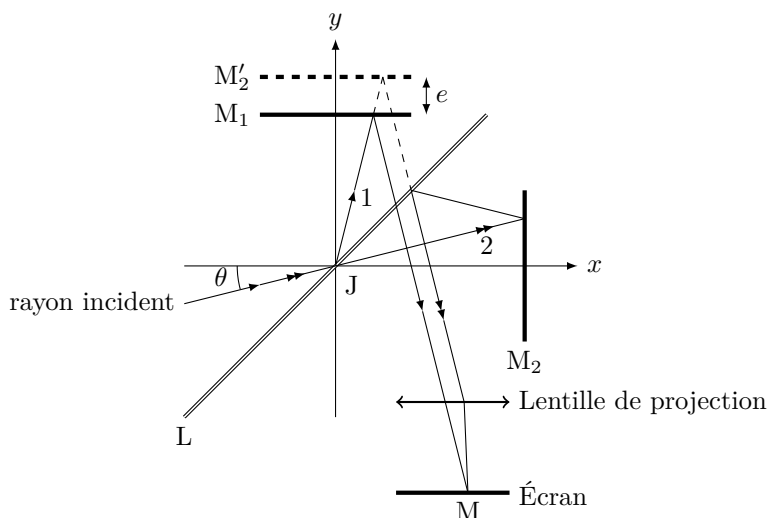
- 41 Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement pour en déduire le nombre de Strouhal à l'aide de la formule du modèle.

I. INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON ET ÉPAISSEUR D'UNE LAME DE SAVON

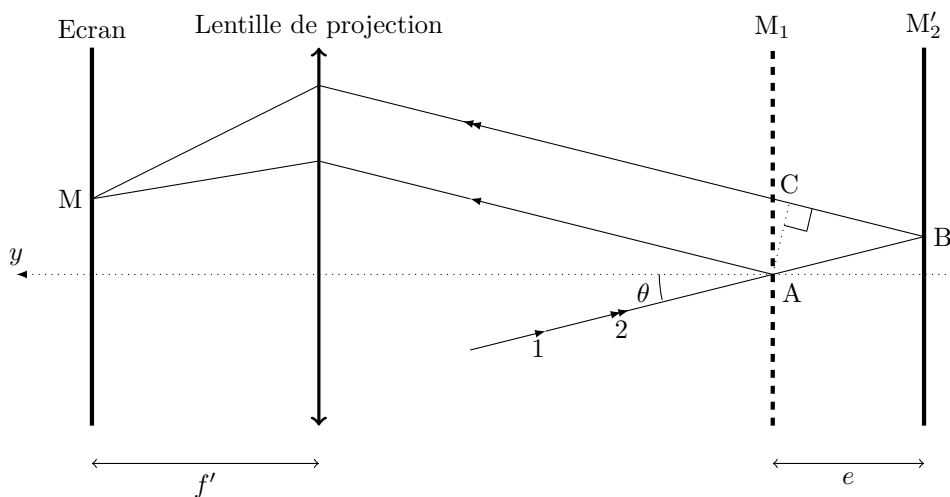
1 Le rayon incident est séparé par la lame réfléchissante L en deux rayons que l'on note 1 et 2. Ils suivent les chemins suivants :

- rayon 1 : L (réflexion) \rightarrow M₁ (réflexion) \rightarrow L (transmission) ;
- rayon 2 : L (transmission) \rightarrow M₂ (réflexion) \rightarrow L (réflexion).

Les deux rayons sortent parallèles dans l'espace d'observation. En lame d'air équivalente, on considère le miroir M'₂, qui est l'image du miroir M₂ à travers la lame semi-réfléchissante L.



2 Le schéma ci-dessous représente les chemins optiques équivalents au montage de l'interféromètre de Michelson en configuration lame d'air.



Soit C le projeté orthogonal du point A sur le rayon réfléchi par le miroir M'_2 . Les points A et C sont sur un même plan perpendiculaire aux deux rayons réfléchis. D'après le théorème de Malus combiné au principe du retour inverse de la lumière, $[CM]_2 = [AM]_1$. La différence de marche vaut alors

$$\begin{aligned}\delta(M) &= [AM]_2 - [AM]_1 \\ &= [AB]_2 + [BC]_2 + [CM]_2 - [AM]_1 \\ &= [AB]_2 + [BC]_2 \\ &= [AB]_2 + [AB]_2 \cos(2\theta) \\ &= \frac{e}{\cos \theta} \times (1 + \cos(2\theta)) \\ &= \frac{e}{\cos \theta} \times 2 \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(M) = 2e \cos \theta}$$

3 La figure d'interférence est **localisée à l'infini**. Pour l'observer, un écran d'observation est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. On choisit un lentille de grande focale (1 m), pour que les anneaux soient grands.

On peut également ajouter une lentille de faible focale (condenseur) en amont de l'interféromètre de Michelson pour concentrer le faisceau de lumière incident sur les miroirs.

4 Comme on peut l'observer sur la figure de la question 2, la différence de marche δ est **invariante par rotation** du point M autour de l'axe Oy . La forme de la figure d'interférence est ainsi une conséquence de la symétrie axiale du dispositif. Les rayons interférant en un point M présentent la même inclinaison θ , raison pour laquelle on parle de **franges d'égale inclinaison**.

5 Le contact optique est obtenu lorsque l'on **translate** l'un des miroirs jusqu'à ce que $e = 0$ (M'_1 et M_2 sont alors confondus). Considérons une frange d'inclinaison θ donnée. On a

$$\delta = 2e \cos \theta$$

Donc $d\delta = 2 de \cos(\theta) - 2e d\theta \sin \theta = 0$

Ainsi $\frac{d\theta}{de} = \frac{\cot \theta}{e}$

On constate alors que, lorsque e diminue, θ diminue également. Par conséquent, **l'anneau se réduit**, jusqu'à disparaître au centre de la figure quand on prolonge suffisamment la translation. Au contact optique, la différence de marche est nulle pour tout angle θ : l'éclairage est **uniforme**.

6 Avec une source étendue, les interférences sont localisées sur une surface presque confondue avec les plans des miroirs M_1 et M'_2 . En pratique, il faut faire **l'image des miroirs sur le plan d'observation** avec une lentille convergente, ou observer directement dans l'interféromètre.

7 Les interférences sont constructives en un point M tel que $\delta = k\lambda_0$, $k \in \mathbb{Z}$. La plus petite valeur de x séparant deux points où des interférences constructives sont observées est i . L'interfrange vaut alors

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}}$$