X/ENS Maths PC 2021 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Julie Gauthier (professeur agrégé), Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose l'étude d'une borne supérieure définie à partir d'une norme sur les polynômes à coefficients complexes. Pour K une partie bornée, fermée et infinie de $\mathbb{C}$, on munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme infinie sur K. Il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est-à-dire que pour tout couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$, on a

$$\|Q\|_K \|R\|_K \geqslant \|QR\|_K$$

Le but du problème est de calculer la valeur maximale $C_{n,m}^K$ pour $Q \in \mathbb{C}_n[X] \smallsetminus \{0\}$ et $R \in \mathbb{C}_m[X] \smallsetminus \{0\}$ du quotient

$$\frac{\|Q\|_K \|R\|_K}{\|QR\|_K}$$

dans deux cas particuliers : lorsque K est égal au disque unité fermé de $\mathbb{C}$ (partie III) et lorsque K est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

- Dans la partie I, on montre des résultats généraux sur $\|\cdot\|_K$ lorsque K est une partie fermée et bornée quelconque de $\mathbb{C}$. C'est la seule partie dont la difficulté globale est raisonnable.
- Dans la partie II, on travaille avec une théorie de l'intégration légèrement plus puissante que celle au programme afin d'étudier la mesure de Mahler d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Cette mesure sera utilisée dans la partie III. Le niveau est assez soutenu car sont abordés, sans les mentionner explicitement, des résultats d'analyse complexe, un domaine des mathématiques qui n'est pas non plus au programme.
- La partie III propose d'établir une majoration optimale de $C_{n,m}^{\mathbb{D}}$, où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. L'ensemble de la partie est à la fois très technique et astucieux. Une grande partie des questions nécessite une compréhension profonde des objets manipulés.
- La dernière partie vise à calculer $C_{n,m}^{I}$ pour I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. La moitié des questions sont d'un niveau déraisonnable, même pour un sujet X/ENS.

La difficulté de ce sujet a manifestement été très mal évaluée. Si les questions 1.5, 2.13, 3.18, 3.26 et 4.44 sont ardues, les questions 3.23, 4.39 et 4.40 sont presque introuvables ! Pourtant, se frotter à ce problème est un bon entraînement. En effet, d'une part cela permet de se préparer à la gestion du temps lors d'une épreuve trop longue et trop difficile, et d'autre part le problème en lui-même permet de bien revoir une grande partie du programme : séries entières, séries numériques, intégration, équations différentielles, espace vectoriels normés. Que les élèves de la filière MP ne s'imaginent pas que ce sujet est facile puisqu'il est tombé en PC : il s'agit sûrement, pour eux aussi, d'un véritable défi !

Indications

1.1 Utiliser le fait que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, l'application $z \mapsto \mathrm{P}(z)$ est continue.

1.5 Considérer $\mathrm{M} > 0$ qui vérifie $\mathrm{M} \geqslant |z|$ pour tout $z \in \mathrm{K}$ et montrer que, pour $\rho > 0$,

$$\forall z \in \mathrm{K} \qquad \left|\frac{(\mathrm{Q}_\rho \mathrm{R}_\rho)(z)}{\mathrm{Q}_\rho(a)\mathrm{R}_\rho(b)}\right| \leqslant \frac{4\mathrm{M}^2}{\rho^2\,|a-b|^2} + \left|1 - \frac{1}{\rho}\right|$$

1.6 Vérifier que E est non vide et établir que $\|\cdot\|$ est une norme sur V. Montrer que f est continue.

1.7 Utiliser la question précédente pour montrer que

$$\mathrm{C}_{n,m}^{\mathrm{K}} = \frac{\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}}\|\mathrm{R}_0\|_{\mathrm{K}}}{\|\mathrm{Q}_0\mathrm{R}_0\|_{\mathrm{K}}}$$

2.8 Découper l'intervalle d'intégration avec une subdivision composée des racines de Q.

2.10 Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour montrer la continuité de φ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et le théorème de convergence dominée pour la continuité en 0.

2.11 Utiliser la question 2.9 pour justifier que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Q}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\right|^p \,\mathrm{d}\theta > 0$.

2.12 Remarquer que $\qquad \forall p > 0 \qquad \dfrac{\varphi(p)}{p} = \dfrac{\varphi(p) - \varphi(0)}{p - 0}$

2.13 Contrairement à ce que propose l'énoncé, on pourra étudier la fonction

$$f\colon \begin{cases}]\,-1\,;1\,[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad r \quad\ \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}/(1 - r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}) \end{cases}$$

où θ est un réel quelconque. Cette fonction est développable en série entière. On pourra intégrer sa partie réelle sur $[\,0\,;r\,]$.

2.14 Utiliser la formule établie à la question précédente.

2.15 On pourra considérer $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi} \in \partial\mathbb{D}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\,0\,;1\,[^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et montrer, grâce au théorème de convergence dominée que

$$\mathrm{M}(\mathrm{X} - r_n z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{M}(\mathrm{X} - z)$$

Pour ce faire, on pourra utiliser que

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \qquad a \leqslant b \leqslant c \Longrightarrow |\ln(b)| \leqslant \max\left(|\ln(a)|\,, |\ln(c)|\right)$$

après avoir justifié l'encadrement

$$|\sin(\theta - \psi)| \leqslant \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - r_n z\right| \leqslant 2$$

2.16 Utiliser la question 2.14.

3.17 On pourra commencer par établir le résultat pour les polynômes de la base canonique $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

3.18 Pour montrer que $\|\mathrm{P}\|_{\partial\mathbb{D}} \geqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}}$, on pourra considérer un élément $z \in \mathbb{D}$ tel que $\|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}} = |\mathrm{P}(z)|$, utiliser la question précédente avec $r = 1 - |z|$ et commencer par montrer que

$$\int_0^{2\pi} \|\mathrm{P}\|_{\mathbb{D}} - \left|\mathrm{P}(z + r\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\right| \,\mathrm{d}\theta = 0$$

3.20 Écrire
$$Q = \mu \prod_{i=1}^{k} (X - r_i) \qquad \text{et} \qquad R = \gamma \prod_{i=1}^{k'} (X - r_i{}')$$

et utiliser la question 3.18 pour montrer l'existence de $(u, v) \in \partial\mathbb{D}^2$ tel que
$$\|Q\|_{\mathbb{D}} = |Q(u)| \qquad \text{et} \qquad \|R\|_{\mathbb{D}} = |R(v)|$$

3.21 A partir d'une expression de P comme un polynôme scindé, obtenir une expression scindée de S puis utiliser les résultats des questions 2.15 et 2.16 pour montrer que
$$M(S) = |\lambda| \prod_{i=1}^{m+n} \max\left(|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\right)$$

3.22 Utiliser les questions 3.18 et 3.19 pour montrer que
$$\left|P\left(\frac{u\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - v}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1}\right)\right| \leqslant \|P\|_{\mathbb{D}} \max\left\{1, \left|\frac{u\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - v}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1}\right|\right\}^{n+m}$$

et en déduire que
$$\forall \theta \in \left]\, 0\,; 2\pi\, \right[\qquad \left|S(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta})\right| \leqslant \|P\|_{\mathbb{D}} \max\left\{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1\right|, \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - w\right|\right\}^{n+m}$$

3.23 Montrer que
$$I(\psi) = \int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1\right|, \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi}\right|\right\}\right) \, \mathrm{d}\theta$$

est maximale pour $\psi = \pi$. Pour ce faire, il sera utile de remarquer que la quantité $\max\left\{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - 1\right|, \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi}\right|\right\}$ correspond à distance entre le point $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$ et le point qui lui est le plus éloigné parmi 1 et $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\psi}$. En remarquant que l'intégrande est 2π-périodique, utiliser la relation de Chasles pour faire disparaitre le max dans l'argument du logarithme.

3.24 On pourra se servir du découpage de l'intégrale fait à la question précédente, utiliser la question 3.23 et effectuer une permutation série-intégrale.

3.26 Montrer que $\|Q_k R_k\|_{\mathbb{D}} = 2$. Penser aux sommes de Riemann.

4.27 Remarquer que, si $c < d$, la fonction
$$f\colon \begin{cases} [\,c\,; d\,] \longrightarrow [\,a\,; b\,] \\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{b-a}{d-c}(x - c) + a \end{cases}$$

est une bijection.

4.30 Considérer $(x, y) \in I^2$ tel que $\|Q_0\|_I = |Q_0|$ et $\|R_0\|_I = |R_0|$. Si $x \neq y$, utiliser le résultat de la question 4.27. Sinon, poser $Q_1 = Q_0(-xX)$ et $R_1 = R_0(xX)$. Dans tous les cas, justifier que l'on peut toujours supposer Q_1 et R_1 unitaires.

4.32 Montrer que $\|S_2\|_I = \|Q_2\|_I$. On pourra remarquer que
$$\forall x \in [\,-1\,; 1\,] \qquad \big|x + 1 - |w + 1|\big| \leqslant |x - w|$$

4.34 En étudiant la fonction
$$g\colon \begin{cases} [\,-1\,; 1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \dfrac{1-w}{(w-x)^2} \end{cases}$$

Montrer que $\|S_3\|_I = \dfrac{2}{1+w}\|Q_3\|_I$.

4.35 Considérer $w \in \mathbb{C}$ une racine de R_2 et $\mathrm{T} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{R}_2 = (\mathrm{X} - w)\mathrm{T}$. Poser

$$\mathrm{T}_2 = (\mathrm{X} - 1 + |w - 1|)\mathrm{T}$$

et raisonner comme à la question précédente en observant que

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad |x - 1 + |w-1|| \leqslant |w - x|$$

4.36 Procéder par l'absurde et supposer que $\mathrm{R} \neq \prod\limits_{k=1}^{m} (\mathrm{X} - x_k)$. Justifier qu'il existe alors $j \in [\![\, m+1\,; n+m \,]\!]$ et $i \in [\![\, 1\,; n \,]\!]$ tels que

$$x_i \neq x_j \qquad \mathrm{R}(x_j) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(x_i) = 0$$

puis poser $\qquad \mathrm{Q}_1 = \dfrac{\mathrm{X} - x_j}{\mathrm{X} - x_i}\mathrm{Q} \qquad$ et $\qquad \mathrm{R}_1 = \dfrac{\mathrm{X} - x_i}{\mathrm{X} - x_j}\mathrm{R}$

Comparer les quantités $|1 + x_i|\,|1 - x_j|$ et $|1 - x_i|\,|1 + x_j|$.

4.37 Étudier le signe de Q' sur $]\,{-\infty}\,; -1\,[$ en discutant selon la parité de n.

4.38 Remarquer que, si $|\mathrm{P}(-1)| < \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}$, pour ε suffisamment petit, $\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}_\varepsilon} = \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}$.

4.39 Poser $\mathrm{T} = \mathrm{S} - \beta(\mathrm{X}+1)$ avec $\beta = \min(\varepsilon, \alpha)/2$ et

$$\alpha = \inf \{\mathrm{S}(x) \mid x \in [\,-1\,;1\,] \smallsetminus \,]\, x_k - \varepsilon\,; x_{k+1} + \varepsilon\,[\}$$

Montrer ensuite que $\|\mathrm{TU}\|_{\mathrm{I}} \geqslant \|\mathrm{SU}\|_{\mathrm{I}}$ et que $\|\mathrm{TUR}\|_{\mathrm{I}} \leqslant \|\mathrm{SUR}\|_{\mathrm{I}}$. Pour établir ce second point, on pourra prendre $\varepsilon = (\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}} - \|\mathrm{P}\|_{[\,x_k\,; x_{k+1}\,]})/\|\mathrm{UR}\|_{\mathrm{I}}$ Un tel ε est strictement positif si l'on suppose

$$\forall y \in \,]\, x_k\,; x_{k+1}\,[\qquad |\mathrm{P}(y)| \leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}$$

Bien que l'énoncé ne le précise pas explicitement, on pourra supposer que les racines $x_m \leqslant \cdots \leqslant x_{m+n}$ sont distinctes deux à deux. On pourra également supposer ε assez petit de sorte que $]\,-1\,;1\,] \smallsetminus \,]\, x_k - \varepsilon\,; x_{k+1} - \varepsilon\,[\neq \varnothing$.

4.41 Introduire $\mathrm{U} = (n+m)^2({\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{I}}}^2 - \mathrm{P}^2)$ et montrer qu'il a les mêmes racines que le polynôme $(1 - \mathrm{X}^2){\mathrm{P}'}^2$ en utilisant les résultats démontrés ou admis dans les questions 4.39 et 4.40. De même qu'à la question 4.39, on pourra supposer que les racines de P sont deux à deux distinctes.

4.43 Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + (n+m)^2 y = 0$$

Remarquer que $\mathrm{P}(1) > 0$ et utiliser le résultat admis par l'énoncé à la fin de la question 4.38 pour conclure.

4.44 Montrer que $|\mathrm{P}(-1)| = 2^{-n-m+1}$ en utilisant l'expression de P sur $[\,-1\,;1\,]$ obtenue à la question précédente. On pourra remarquer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad 1 - \cos(\theta) = \frac{1}{2}\left|1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right|^2$$

et utiliser la question 2.13.