X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2021 Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Ce problème est consacré à l'étude de l'effet piézo-électrique et de deux de ses applications.

- Dans la partie 1, on construit un modèle de matériau piézo-électrique à une dimension et l'on caractérise ses propriétés électrostatiques et mécaniques ainsi que leur couplage. On propose ensuite une version simplifiée de ces propriétés en régime oscillant.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude des applications de l'effet piézo-électrique pour la transformation de tension, d'abord dans un cadre très général, puis dans le cadre d'un dispositif d'alimentation de lampe fluorescente à cathode froide.
- La partie 3 propose d'étudier une boucle électronique permettant de réaliser un oscillateur à quartz et de discuter des mérites de l'emploi de ce quartz par rapport à une bobine.

Le cœur du modèle constitue la partie 1, qui est beaucoup plus longue que les deux autres car son approche est très progressive. La troisième partie est plus courte et très largement indépendante des deux autres.

Ce problème très intéressant permet d'aborder une grande variété de thèmes et de méthodes au programme de MP, mais il aborde aussi un domaine totalement hors programme : les transformateurs. Ils sont introduits pas à pas. C'est là une manière de tester la capacité des candidats à s'approprier rapidement des concepts nouveaux. Cela rajoutait de la difficulté au sujet, qui est très long et comporte plusieurs questions difficiles.

Indications

Partie 1

2 Faire le bilan des forces sur les points P, N et B, tous les trois à l'équilibre, pour compléter le jeu d'équations sur x_{P}, x_{N} et x_{B}.

4 La force et la déformation sont uniformément réparties parmi les cellules.

6 On peut essayer de déterminer la distance pour laquelle l'allongement correspondrait à une distance particulière.

7 Quelle est la relation entre Δ_{r} et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$?

9 Appliquer le théorème de Gauss à un petit cylindre comprenant l'interface entre l'élément piézo-électrique et l'électrode en $x = \mathrm{L}$.

12 Faire un bilan des forces sur un petit volume, en faisant attention au sens des forces.

15 Que se passe-t-il si ω a une partie imaginaire ?

19 On cherche une équation reliant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

21 Graphiquement, on peut remarquer que les intersections de la courbe $\cot(\theta)$ avec la droite $\mu\theta$ sont souvent proches des asymptotes verticales.

23 L'énergie cinétique de $\mathcal{S}$ est la somme des énergies de chaque tranche élémentaire de largeur $\mathrm{d}x$.

24 L'énergie potentielle de chaque tranche élémentaire est obtenue en sommant le travail de la contrainte extérieure menant d'une élongation nulle à une élongation totale $u(x + \mathrm{d}x) - u(x)$.

25 Pas besoin de calculs supplémentaires pour définir la pulsation propre d'un oscillateur harmonique équivalent.

26 Attention à la projection des forces sur $\overrightarrow{e_x}$.

28 Le schéma du transformateur correspond simplement à la proportionnalité des tensions de part et d'autre du quadripôle, sans autre relation électrique.

Partie 2

30 La figure de droite permet de lire les parties réelle et imaginaire de $\mathrm{Y}_1(\omega_{\mathrm{s}})$.

32 Si l'expression de R_{s} se simplifie, celle de C_{s} aussi.

Partie 3

38 On doit supposer qu'aucun courant ne sort en C.

41 Analyser les parties réelle et imaginaire de l'expression obtenue à la question 40. Déterminer la valeur de I pour expliquer l'absence de R dans ces relations.

44 La condition 19, en imposant le signe de S_2, définit une plage de pulsations possibles.

L'effet piézo-électrique et deux de ses applications

1. Étude du comportement d'un milieu piézo-électrique

1 Les ressorts modélisent les forces de rappel vers la position d'équilibre. Ces forces ont pour origine la déformation des liaisons chimiques ainsi que les interactions stériques (non-interpénétrabilité des ions) et électriques. Du fait de la répartition des charges et de l'énormité des champs électriques en présence, les forces de rappel peuvent être linéarisées et modélisées par des ressorts si les déplacements caractérisés par $x_{\rm B}$ sont de faible amplitude par rapport à la taille caractéristique des ions, qui est comparable à $2a$, donc si

$$\boxed{x_{\rm B} \ll 2a}$$

> Le facteur 2 n'est pas très important dans cette inégalité mais on choisit de le conserver car il se rapporte à la taille de la maille cristalline.

2 Effectuons un bilan des forces appliquées sur P, le barycentre des charges positives dans le modèle de la figure 2. Ces forces sont :

- la force de rappel du ressort K_1 : $-\mathrm{K}_1\, x_{\rm P}\, \overrightarrow{e_x}$;
- la force de rappel du ressort K_2 : $\mathrm{K}_2\,(x_{\rm B} - x_{\rm P})\, \overrightarrow{e_x}$;
- la force électrique sur la charge $+q$ portée par P : $q\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

> Il est important de ne pas se tromper dans l'orientation des forces de rappel des ressorts. Le plus simple est de faire varier tour à tour chaque paramètre de position et de vérifier l'orientation de la force de rappel qui découle de cette variation.

Dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire, appliquons ensuite le Principe Fondamental de la Statique (PFS) à P considéré comme étant à l'équilibre :

$$m_{\rm P}\, \ddot{x}_{\rm P} \overrightarrow{e_x} = -\mathrm{K}_1\, x_{\rm P}\, \overrightarrow{e_x} + \mathrm{K}_2\,(x_{\rm B} - x_{\rm P})\, \overrightarrow{e_x} + q\,\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{0}$$

Projetons cette relation sur $\overrightarrow{e_x}$ pour obtenir :

$$-\mathrm{K}_1\, x_{\rm P} + \mathrm{K}_2\,(x_{\rm B} - x_{\rm P}) + q\,\mathrm{E} = 0$$

Cette relation permet d'exprimer $x_{\rm P}$ en fonction de $x_{\rm B}$ et de E :

$$x_{\rm P} = \frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2} x_{\rm B} + \frac{q\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2}$$

Considérer le cas du barycentre des charges négatives revient à substituer $x_{\rm N}$ à $x_{\rm P}$, à permuter K_1 et K_2 et à changer q en $-q$. Dès lors l'équation précédente devient :

$$x_{\rm N} = \frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2} x_{\rm B} - \frac{q\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2}$$

Considérons le point B en bout de maille et analysons son équilibre. Les forces exercées sur B sont :

- la force de rappel du ressort K_2 lié à P : $-\mathrm{K}_2\,(x_{\rm B} - x_{\rm P})\, \overrightarrow{e_x}$;
- la force de rappel du ressort K_1 lié à N : $-\mathrm{K}_1\,(x_{\rm B} - x_{\rm N})\, \overrightarrow{e_x}$;
- la force extérieure $\overrightarrow{f} = f\overrightarrow{e_x}$.

Le PFS appliqué à B donne alors, après projection sur $\overrightarrow{e_x}$,

$$-\mathrm{K}_2\,(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{P}) - \mathrm{K}_1\,(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{N}) + f = 0$$

Isolons f et substituons à x_P et x_N leurs expressions en fonction de x_B et $q\mathrm{E}$:

$$f = \mathrm{K}_2\,(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{P}) + \mathrm{K}_1\,(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{N})$$

soit $$f = \mathrm{K}_2 x_\mathrm{B} - \frac{{\mathrm{K}_2}^2}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}x_\mathrm{B} - \frac{\mathrm{K}_2 q\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2} + \mathrm{K}_1 x_\mathrm{B} - \frac{{\mathrm{K}_1}^2}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}x_\mathrm{B} + \frac{\mathrm{K}_1 q\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}$$

si bien que $$\boxed{f = \frac{2\,\mathrm{K}_1\,\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}\,x_\mathrm{B} + \left(\frac{\mathrm{K}_1-\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}\right)\,q\,\mathrm{E}}$$

> Le premier terme du membre de droite correspond au double de l'association en série de K_1 et K_2, c'est-à-dire à l'association en parallèle des ressorts liés à N et P.
>
> La deuxième composante correspond à l'influence de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$, nulle si $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2$ car, dans ce cas, l'action du champ sur P est exactement compensée par son action sur N.

3 Appuyons nous sur les expressions de x_P et x_N en fonction de x_B et de $q\mathrm{E}$ obtenues à la question précédente pour calculer p :

$$p = q(x_\mathrm{P} - x_\mathrm{N})$$

soit $$p = q\left[\left(\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}x_\mathrm{B} + \frac{q\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}\right) - \left(\frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}x_\mathrm{B} - \frac{q\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}\right)\right]$$

qui conduit à $$\boxed{p = \frac{2\,q^2\,\mathrm{E}}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2} + q\left(\frac{\mathrm{K}_2-\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}_1+\mathrm{K}_2}\right)x_\mathrm{B}}$$

> Le deuxième terme du second membre est remarquable : une déformation de la cellule engendre un moment dipolaire si $\mathrm{K}_1 \neq \mathrm{K}_2$, c'est-à-dire si la symétrie $x \to -x$ n'est pas respectée. Cette propriété s'étend à trois dimensions : un cristal ne peut pas être piézo-électrique s'il possède un centre d'inversion.

4 Toutes les mailles sont identiques donc la force $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ se répartit de manière homogène sur $\mathrm{N}_2 \times \mathrm{N}_3$ colonnes. La force de traction sur chaque colonne est alors

$$f_{23} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{N}_2\mathrm{N}_3}$$

À l'équilibre cette force s'exerce sur chaque maille de la colonne. Dès lors

$$f = f_{23} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{N}_2\mathrm{N}_3}$$

En outre, chaque maille d'une colonne est soumise au même champ et à la même force de traction, donc l'élongation totale Δ est également distribuée sur chaque maille, de sorte que

$$x_{i+1} - x_i = x_\mathrm{B} = \frac{\Delta}{\mathrm{N}_1}$$