Mines Physique 2 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Frémont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Freulon (professeur en CPGE).

Qu'elle soit d'origine acoustique, magnétique ou encore optique, la lévitation est un phénomène physique qui fascine les petits comme les grands et, parmi eux, les physiciens. Depuis quelques années, plusieurs équipes de recherche sont parvenues à faire léviter, grâce à une onde acoustique, de petites billes de polystyrène. Au-delà de son aspect ludique, la lévitation acoustique de petites particules ou de gouttelettes pourrait offrir de nouvelles perspectives en biologie, en chimie analytique, ou encore dans l'industrie nucléaire. Ici, le sujet propose d'aborder le principe de la lévitation acoustique de manière simplifiée, à travers deux parties totalement indépendantes.

- Dans la première partie, on s'intéresse au dispositif de lévitation acoustique le plus simple qui puisse être envisagé : un émetteur piézoélectrique placé face à un réflecteur plan génère une onde acoustique stationnaire résonante. On détermine le champ de pression caractéristique de cette onde puis la résultante des forces de pression subies par une bille en présence de l'onde. Cela mène à une discussion sur l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité. Cette partie, plutôt guidée, sollicite des notions et méthodes classiques du cours consacré aux ondes acoustiques dans les fluides, ainsi qu'à la mécanique du point et à la statique des fluides.
- La partie II est consacrée à un pan concret de la mise en œuvre du dispositif de la partie I : l'alimentation de l'émetteur piézoélectrique par un convertisseur de puissance. Une fois identifiée la séquence de commande des interrupteurs électroniques, on détermine les conditions qui permettent d'obtenir une tension d'alimentation alternative quasi-sinusoïdale. Pour cela, il faut maîtriser le cours sur le filtrage linéaire et savoir exploiter le développement en série de Fourier (fourni) d'un signal périodique.

Construit de manière résolument progressive et de longueur raisonnable, ce sujet comporte un nombre significatif de questions de cours. En outre, il propose de nombreuses séquences d'interprétation physique, permettant aux candidats de montrer leur capacité à saisir les enjeux d'un dispositif concret, contemporain et stimulant. Enfin, le bon équilibre du questionnement entre restitution des acquis, pratique calculatoire et interprétation physique fait de ce sujet un excellent support de révision.

Indications

Partie I

2 Commencer par montrer que

$$\overrightarrow{a} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_z}$$

puis simplifier cette expression dans le cadre de l'approximation acoustique.

6 La longueur d'onde doit être beaucoup plus grande que la distance sur laquelle l'énergie thermique diffuse pendant une période. Dans un milieu de diffusivité D, la distance caractéristique de diffusion ℓ^* est reliée à la durée t^* du phénomène par $\ell^* \sim \sqrt{\mathrm{D}\,t^*}$.

8 Comparer $\mathrm{Z_m}$ à λ.

9 Le dispositif étudié présente de fortes similitudes avec la corde de Melde. On peut donc chercher v_1 sous la forme d'une onde stationnaire de pulsation ω.

11 Utiliser une des équations de couplage entre les champs v_1 et p_1 pour déterminer l'expression de ce dernier.

Avec l'hypothèse fournie, la résultante des efforts de pression, qui s'exercent sur la bille de volume $\mathcal{V}$, est donnée par

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\,\mathcal{V}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}(z,t)$$

14 La stabilité d'une position d'équilibre z_{eq} dépend du signe de la dérivée de $\langle \mathrm{F_z}\rangle$ en $z = z_{\mathrm{eq}}$.

16 La période spatiale de $\langle \mathrm{F_z}\rangle$ correspond à $\lambda/2$.

17 Poser $z(t) = z_{\mathrm{eq}} + \varepsilon(t)$. À la limite $|\varepsilon(t)| \ll \lambda$, montrer que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique pour une position d'équilibre stable.

Partie II

19 La source d'entrée ne doit jamais être court-circuitée, tandis que la charge ne doit jamais se retrouver en circuit ouvert.

20 Considérer la symétrie du signal sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}/2]$ pour justifier que les coefficients b_{2p} (p entier naturel) sont nuls.

21 L'harmonique $p = 1$ est celui qui contribue le plus à la distorsion du signal.

24 Déterminer le signal filtré associé à un harmonique quelconque de la tension u, puis exploiter la linéarité de l'opération de filtrage pour exprimer u_{r} sous forme d'une somme.

La lévitation acoustique

I. La lévitation grâce à une onde sonore

1 La propagation d'une onde acoustique dans l'air entraîne une perturbation de l'état du fluide par rapport à son état thermodynamique au repos. Cette perturbation est traduite par l'introduction des champs p_1, μ_1 et v_1 dans la modélisation.

> L'approximation acoustique consiste à supposer que :
> - $|p_1| \ll \mathrm{P}_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$ (ces deux hypothèses sont déjà mentionnées dans l'énoncé) ;
> - $|v_1| \ll c$ où c désigne la célérité du son dans le fluide support.
>
> Dans le cadre de cette approche perturbative, les équations régissant le comportement du fluide en présence de l'onde sonore peuvent être simplifiées en ne conservant que les termes de plus petit ordre non nul relativement aux champs p_1, μ_1 et v_1, ainsi qu'à leurs dérivées partielles.

2 Supposons que la particule de fluide étudiée se trouve à l'abscisse z à l'instant t. Dans le référentiel du laboratoire, sa vitesse instantanée $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ est alors

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}(t) = \overrightarrow{v}(z,t) = v_1(z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

À l'instant $t+\mathrm{d}t$, cette même particule de fluide se trouve en $z + v_1(z,t)\,\mathrm{d}t$ et sa vitesse instantanée s'écrit désormais

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}(t+\mathrm{d}t) = \overrightarrow{v}\big(z + v_1(z,t)\,\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t\big) = v_1\big(z + v_1(z,t)\,\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t\big)\,\overrightarrow{e_z}$$

Par définition, son accélération $\overrightarrow{a}(t)$ à l'instant t est donnée par

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}(t) &= \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{V}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{V}}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&\simeq \frac{v_1\big(z + v_1(z,t)\,\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t\big) - v_1(z,t)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_z} \\
\overrightarrow{a}(t) &\simeq \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t}(z,t)\,\overrightarrow{e_z}}_{\text{ordre 1 en } v_1} + \underbrace{v_1(z,t)\,\frac{\partial v_1}{\partial z}(z,t)\,\overrightarrow{e_z}}_{\text{ordre 2 en } v_1}
\end{aligned}$$

On néglige le terme d'ordre 2 en v_1 devant le terme d'ordre 1, ce qui donne

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{\partial v_1}{\partial t}(z,t)\,\overrightarrow{e_z} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}(z,t)}$$

> Il est également possible de raisonner sur les ordres de grandeur. Notons v_1^* l'ordre de grandeur caractéristique de v_1, alors
>
> $$\left|\frac{\partial v_1}{\partial t}\right| \sim f\,v_1^* \qquad \text{et} \qquad \left|v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial z}\right| \sim \frac{{v_1^*}^2}{\lambda}$$
>
> où f est la fréquence de l'onde et $\lambda = c/f$ sa longueur d'onde. Ainsi
>
> $$\frac{\left|v_1\,\dfrac{\partial v_1}{\partial z}\right|}{\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial t}\right|} \sim \frac{v_1^*}{c} \ll 1$$

3 Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, en l'absence de tout phénomène dissipatif qui serait source d'irréversibilité, la particule de fluide envisagée dans la question précédente est soumise uniquement à :

- son poids $\mu_0 \mathrm{d}\tau \, \overrightarrow{g}$;
- la résultante des efforts de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P}(z,t)\, \mathrm{d}\tau$.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule de fluide s'écrit

$$\mu_0 \mathrm{d}\tau \, \overrightarrow{a}(t) = \mu_0 \mathrm{d}\tau \, \overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \mathrm{P}(z,t)\, \mathrm{d}\tau$$

Après projection selon $\overrightarrow{e_z}$ et simplification par $\mathrm{d}\tau$, il en découle

$$\boxed{\mu_0 \, \frac{\partial v_1}{\partial t}(z,t) = -\mu_0 g - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}(z,t)} \qquad (1)$$

Dans le cas particulier de l'état de repos, l'équation établie reste valable ; alors

$$v_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(z,t) = \mathrm{P}_0\,(z)$$

Il apparaît que
$$\boxed{0 = -\mu_0 g - \frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_0}{\mathrm{d}z}\,(z)}$$

ce qui permet de simplifier l'équation (1) sous la forme

$$\boxed{\mu_0 \, \frac{\partial v_1}{\partial t}(z,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial z}(z,t)} \qquad (2)$$

4 Une fois linéarisée dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation locale de conservation de la masse devient

$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(z,t) + \mu_0 \, \frac{\partial v_1}{\partial z}(z,t) = 0} \qquad (3)$$

L'équation d'évolution isentropique de la particule de fluide s'écrit quant à elle

$$\boxed{\mu_1(z,t) = \mu_0 \chi_{\mathrm{S}} \, p_1(z,t)} \qquad (4)$$

> L'énoncé demande de « donner » les équations ci-dessus ; cela sous-entend qu'il n'est pas demandé de les établir.

5 Injectons tout d'abord l'équation (4) dans l'équation (3). Après simplification par μ_0, il vient

$$\chi_{\mathrm{S}} \, \frac{\partial p_1}{\partial t}(z,t) + \frac{\partial v_1}{\partial z}(z,t) = 0 \qquad (5)$$

Associée à l'équation (2), l'équation (5) fait apparaître un couplage spatio-temporel entre les champs p_1 et v_1. Dérivons l'équation (2) par rapport à t et l'équation (5) par rapport à z :

$$\begin{cases} \mu_0 \, \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}(z,t) + \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t \, \partial z}(z,t) = 0 \\[2ex] \chi_{\mathrm{S}} \, \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial z \, \partial t}(z,t) + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}(z,t) = 0 \end{cases}$$