Mines Maths 1 PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Ce problème s'intéresse aux sous-espaces vectoriels $\mathcal{V}$ de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui ne contiennent que des endomorphismes nilpotents. On peut montrer qu'un tel espace $\mathcal{V}$ a toujours une dimension inférieure ou égale à $n\,(n-1)/2$ (ce point est admis par l'énoncé). L'objectif du problème est de déterminer les sous-espaces de ce type qui sont de dimension maximale : on montre que dans ce cas il existe une base B de E telle que tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté dans B par une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire avec des zéros sur la diagonale). On dit que l'on a fait une « réduction simultanée » des endomorphismes de $\mathcal{V}$. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E. Il s'agit d'un résultat relativement récent (théorème de Gerstenhaber, 1958).

- Dans la première partie, on montre quelques résultats techniques sur les endomorphismes nilpotents. Les questions de cette partie sont de bons exercices d'algèbre linéaire.
- Dans la deuxième partie, on met en place un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 à l'aide d'une opération $\otimes$ définie à partir d'un produit scalaire. Cet outil sera utilisé dans la démonstration du théorème. Cette partie est plus abstraite que la précédente et demande de la rigueur conceptuelle.
- Dans la troisième partie, on montre deux lemmes qui sont au cœur de la démonstration du théorème : une identité sur les traces des endomorphismes de $\mathcal{V}$ et une condition suffisante pour avoir un vecteur qui annule tous les endomorphismes de $\mathcal{V}$. La difficulté de cette partie provient des notations. On y utilise une généralisation de la formule du binôme de Newton dans le cas de deux endomorphismes qui ne commutent pas.
- La quatrième partie est la plus longue et contient la démonstration du théorème, par récurrence sur la dimension de E. On montre l'existence d'un vecteur x qui annule simultanément tous les endomorphismes de $\mathcal{V}$ et on travaille ensuite avec le restriction de ces endomorphismes sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}\,(x)^\perp$. Cette partie utilise tous les résultats des parties précédentes et demande encore une fois d'assimiler de nouvelles notations.

Ce problème étudie principalement des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et des applications entre ces sous-espaces, ce qui permet de se confronter à un niveau d'abstraction élevé. Son originalité vient de ce qu'il privilégie les approches spatiale et vectorielle en limitant au maximum l'utilisation des matrices.

Si l'on admet le résultat de la première question, il peut être traité intégralement en fin de première année. Il constitue un bon entraînement sur le programme d'algèbre linéaire de MPSI/PCSI.

Indications

Partie I

1 Utiliser une condition suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ soit trigonalisable, puis montrer que les valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles.

2 Donner un isomorphisme entre $\mathcal{N}_\mathrm{B}$ et $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et justifier que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.

3 Appliquer successivement $u^{p-1}, u^{p-2}, \ldots, u$ à une relation linéaire entre les vecteurs de la première famille.
Pour la deuxième famille, appliquer d'abord u^q puis poser $z = u^{p-q}(x)$ et appliquer successivement $u^{q-1}, \ldots, u$.

4 Montrer d'abord que $\mathrm{Im}\,(u^{p-1}) \subset \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u)$. À l'aide de la question 3, prouver ensuite que si $z \in \mathrm{Im}\,(u^{p-1}) \smallsetminus \{0\}$, alors tout vecteur de $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u)$ est colinéaire à z.

Partie II

5 Utiliser la formule $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F})$. Montrer que $a \longmapsto \varphi_a$ est linéaire et injective et conclure avec un argument sur les dimensions.

6 Montrer que $a \otimes x$ est dans l'ensemble d'arrivée indiqué, pour tout $a \in \mathrm{E}$. Établir ensuite que $a \longmapsto a \otimes x$ est linéaire et injective. Justifier enfin que l'ensemble d'arrivée a la même dimension que E.

7 Compléter x en une base de E et écrire la matrice de $a \otimes x$ dans cette base.

Partie III

8 Procéder par récurrence pour l'existence et les valeurs de $f_0^{(k)}$ et $f_1^{(k)}$.

9 Justifier que $(u + t\,v)^p = 0$ et utiliser l'unicité de la relation démontrée à la question 8.

10 A l'aide des propriétés de la trace, simplifier $\mathrm{Tr}\,(f_1^{(k+1)})$ à partir de sa valeur donnée à la question 8. Montrer ensuite que $(u + t\,v)^{k+1}$ est de trace nulle et développer cette expression.

11 Établir que $t \longmapsto (a \,|\, (u + t\,v)^{p-1}(y))$ est la fonction nulle, puis que c'est une fonction polynomiale en t. Utiliser l'égalité $(\mathrm{K}(\mathcal{V})^\perp)^\perp = \mathrm{K}(\mathcal{V})$.

12 Prouver l'existence par récurrence sur k. Considérer ensuite le cas $k = p$.

Partie IV

13 Montrer que $v \longmapsto v(x)$ et $u \longmapsto \overline{u}$ sont linéaires.

14 Appliquer le théorème du rang à $v \longmapsto v(x)$ et $u \longmapsto \overline{u}$ et voir $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ comme noyaux ou images de ces applications.

15 Justifier que $\mathcal{Z} \subset \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Vect}\,(x)\}$ et utiliser l'isomorphisme de la question 6.

16 Noter $v = a \otimes x$ et montrer que $u^k\,v = a \otimes u^k(x)$. Appliquer ensuite le lemme C et la question 7.

17 Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'a pas de valeur propre non nulle.
Obtenir alors que $\mathrm{Vect}\,(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont en somme directe.

18 Établir la relation par récurrence sur k.

19 Combiner les informations obtenues aux questions 14, 15, 17, 18 et le théorème A.

20 Appliquer l'hypothèse de récurrence à $\overline{\mathcal{V}}$ pour obtenir une base B' de H et montrer que $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{N}_{\mathrm{B}'}$. Compléter ensuite B' par le vecteur x.

21 Avec la question 4, montrer que $\mathrm{Im}\,(v^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}\,(v^{k-1}(x))$ où k est le plus petit entier tel que $v^k(x) = 0$. Utiliser ensuite la question 19.

22 Justifier que $t \longmapsto (v + t\,v_0)(x)$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$ et en déduire que

$$\mathrm{Im}\,((v + t\,v_0)^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$$

Considérer ensuite $f(t) = (a\,|\,(v + t\,v_0)(y))$ pour $t \in \mathbb{R}$, $a \in (\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp}$ et $y \in \mathrm{E}$.

23 Raisonner par l'absurde.

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

1 D'après un corollaire du théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique χ_{M} de M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le cours, toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La matrice M est semblable à une matrice triangulaire supérieure } \mathrm{T} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Comme M et T sont semblables, M^k et T^k sont semblables pour $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les coefficients diagonaux de T. Comme T est triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux de T^k sont $({\lambda_1}^k, \ldots, {\lambda_n}^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme u est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On a alors $\mathrm{M}^p = 0$ (car M^p représente u^p) donc $\mathrm{T}^p = 0$, d'où ${\lambda_1}^p = \cdots = {\lambda_n}^p = 0$ et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les coefficients diagonaux de T sont nuls.}}$$

Dès lors, pour tout entier naturel k non nul, il vient

$$\mathrm{Tr}\,(u^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{T}^k) = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^k = 0$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{Tr}\,(u^k) = 0}$$

> Il est possible de montrer que la réciproque est vraie : si un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie vérifie $\mathrm{Tr}\,(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors u est nilpotent. Cette propriété caractérise donc les endomorphismes nilpotents.
>
> Pour démontrer cette réciproque, on raisonne par l'absurde en supposant qu'une matrice M qui représente u a au moins une valeur propre complexe non nulle. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ toutes les valeurs propres complexes non nulles de M (deux à deux distinctes) et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives. Comme M est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il vient
>
> $$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}^k) = \mathrm{Tr}\,(u^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i\, {\lambda_i}^k = 0$$
>
> En regardant les r premières équations ainsi obtenues pour $k \in [\![\, 1\,;r\,]\!]$, on voit que $(n_1, \ldots, n_r)$ est solution d'un système homogène dont le déterminant D est de type Vandermonde :
>
> $$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_r \\ {\lambda_1}^2 & \cdots & \cdots & {\lambda_r}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ {\lambda_1}^r & \cdots & \cdots & {\lambda_r}^r \end{vmatrix} = (\lambda_1 \cdots \lambda_r) \times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & & \vdots \\ {\lambda_1}^{r-1} & \cdots & \cdots & {\lambda_r}^{r-1} \end{vmatrix}$$
>
> Celui-ci est non nul car les $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont tous non nuls et deux à deux distincts. On en déduit que $(n_1, \ldots, n_r) = (0, \cdots, 0)$, ce qui est absurde. Par suite, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{M}) = \{0\}$. Le polynôme caractéristique de M étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il vaut $\chi_{\mathrm{M}} = X^n$, d'où $\mathrm{M}^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Finalement, $u^n = 0$.