CCINP Maths PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Guilmant (ENS Lyon) ; il a été relu par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Le sujet comporte deux problèmes indépendants mêlant analyse réelle, algèbre linéaire et probabilités.

- Le premier problème est composé deux parties. Il établit une stratégie d'approximation de $\pi/4$ de deux façons.
  - La première partie propose de donner une forme simple à la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal.
  - La seconde reprend cette transformée pour l'exprimer sous forme d'une limite de fonctions de façon à pouvoir approximer correctement $\pi/4$. Elle propose ensuite une méthode plus directe pour démontrer à nouveau le résultat.
- Le second problème, plus long, comporte quatre parties. Il traite des matrices de Kac, qui ont plusieurs applications, notamment en physique des particules. La dernière partie présente ainsi un modèle stochastique qui représente certains phénomènes de mécanique statistique.
  - La première partie est une mise en jambes. Elle s'intéresse au cas simple de la dimension 3. Les résultats étudiés dans la suite sont cependant déjà présents.
  - La deuxième introduit un endomorphisme classique, la dérivation, sur un espace de fonctions construites à partir des fonctions cosinus et sinus.
  - Les résultats de la partie 2 sont ensuite utilisés pour étudier les matrices de Kac de dimension quelconque.
  - La dernière partie utilise les matrices de Kac pour modéliser une expérience aléatoire, les urnes d'Ehrenfest.

Le sujet parcourt à peu près l'ensemble des grands thèmes au programme de PSI. Les candidats étaient amenés à utiliser les théorèmes d'intégration, à établir des majorations et à mobiliser leurs connaissances sur les endomorphismes diagonalisables et les probabilités. Ce sujet permet donc de réviser l'ensemble du programme. Bien qu'il s'agisse souvent d'appliquer le cours, quelques questions opposent plus de résistance.

Indications

Problème 1

1 Majorer sin et $-\sin$ pour conclure.

2 Comparer à une intégrale de Riemann.

3 Comparer $|\sin t/t\mathrm{e}^{-tx}|$ à une fonction intégrable connue.

7 Utiliser la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

9 Utiliser l'équivalent en 0 de la fonction sinus.

10 À l'aide de la question 8, montrer que

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\right| \leqslant 1$$

puis utiliser le théorème de convergence dominée.

11 Utiliser le changement de variable affine $u = ((2k-1)/2^n)t$.

12 Faire apparaître la somme de Riemann sur $[\,0\,;1\,]$ avec pas de 2^{n-1} pour la fonction G. Utiliser la question 4.

13 Utiliser le fait que $k \in [\![\,0\,;2^{n-1}\,]\!]$.

Problème 2

19 La matrice D est un produit de matrices d'opérations élémentaires. On peut répondre sans développer tout le produit matriciel.

21 Procéder par récurrence et montrer la propriété

$$\mathscr{P}(k):\quad \forall i \in [\![\,0\,;k\,]\!] \qquad \lambda_{n-i} = 0$$

lorsque l'on suppose que $\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k f_k = 0$.

23 Écrire $g_k(x) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}(n-k)x}$.

29 Se rappeler que $\det(\mathrm{MN}) = \det(\mathrm{M})\det(\mathrm{N})$.

30 Utiliser la question 29 sous la forme $\mathrm{B}_n = -\mathrm{i}{\mathrm{D}_n}^{-1}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$.

36 Introduire une nouvelle variable pour chaque boule indiquant si cette boule a été placée dans l'urne U_1.

38 Montrer que le vecteur de la loi de probabilité Z d'une loi π' satisfaisant la même propriété que π est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n.

Problème 1. Autour de la fonction sinus cardinal

1 Considérons la fonction $u \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t - \sin t \end{cases}$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$u'(t) = 1 - \cos t \geqslant 0$$

La fonction u est donc croissante. Or $u(0) = 0$ donc pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $u(t) \geqslant 0$, puis

$$t \geqslant \sin t$$

Soit maintenant la fonction $v \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t + \sin t \end{cases}$

dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$v'(t) = 1 + \cos t \geqslant 0$$

La fonction v est donc croissante. Or $v(0) = 0$ donc pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $v(t) \geqslant 0$, puis

$$t \geqslant -\sin t$$

En réunissant les deux inégalité obtenues, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad t \geqslant |\sin t|}$$

2 Notons $f(x,t), g(x,t), h(x,t)$ les intégrandes respectifs de $\mathrm{F}(x), \mathrm{G}(x)$ et $\mathrm{H}(x)$. Posons aussi $f(x,0) = 1$. Par composition et produit, ces fonctions sont continues sur $]\,0\,;+\infty\,[\times [\,0\,;+\infty\,[$. De plus, d'après la question 1, pour tous $x, t > 0$

$$|f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$$

On a aussi $\qquad |g(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-tx} \qquad$ et $\qquad |h(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x,t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad g(x,t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right) \qquad h(x,t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann,

$$\boxed{\text{Les fonctions } \mathrm{F}, \mathrm{G} \text{ et } \mathrm{H} \text{ sont bien définies sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

3 Fixons $x > 0$. Pour tout $t > 0$, d'après la question 1, on a

$$\left|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par le même argument qu'en question 2, par croissance de l'intégrale, on a

$$|\mathrm{F}(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\right| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

La valeur absolue étant positive, on en déduit par encadrement que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0}$$

4 La fonction
$$f\colon \begin{cases} (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-tx} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition en tant que multiplication de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tous $x, t > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\mathrm{e}^{-tx}\sin t = -g(x,t)$$

Cette fonction est continue par rapport à chacune de ses variables. De plus, on a

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$$

Par croissance de l'exponentielle, on obtient donc l'hypothèse de domination

$$\forall a > 0 \quad \forall x > a \quad \forall t > 0 \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-ta}$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-ta}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, toutes les hypothèses du théorème de dérivation sont vérifiées pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \left]\,a\,;+\infty\,\right[$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]\,a\,;+\infty\,\right[$ et

$$\forall x \in \left]\,a\,;+\infty\,\right[\qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} -\,\mathrm{e}^{-tx}\sin t = -\mathrm{G}(x)$$

Le résultat étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{\text{La fonction F est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathrm{F}' = -\mathrm{G}.}$$

5 On a pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{H}(x) + \mathrm{i}\mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(x-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}t$$

Le module de l'intégrande est e^{-tx} qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'intégrande est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et une de ses primitives est la fonction

$$t \longmapsto -\frac{1}{x-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-t(x-\mathrm{i})}$$

qui est bien définie car $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en particulier $x \neq \mathrm{i}$. On en déduit

$$\mathrm{H}(x) + i\mathrm{G}(x) = \left[\frac{1}{i-x}\mathrm{e}^{-t(x-i)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1}$$

Ainsi, en prenant les parties imaginaire et réelle on obtient que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathrm{G}(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}(x) = \frac{x}{x^2+1}}$$

Soit $\alpha > 0$. En faisant un changement de variable linéaire de coefficient directeur non nul $u = \alpha t$, on obtient que pour tout $x > 0$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\alpha}u}\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}\mathrm{H}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Par conséquent
$$\boxed{\forall (\alpha,x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+\alpha^2}}$$