X/ENS Physique B PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Amélie Gay (ENS Lyon) ; il a été relu par Gaëlle Dumas (professeur agrégé) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce problème présente deux types d'ondes de gravité : les ondes de surface et les ondes internes. Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

- La première partie s'intéresse aux ondes de surface créées par l'oscillation d'un cylindre. La mise en équation du mouvement de celui-ci s'effectue d'abord en supposant qu'il n'y a pas de pertes. Ensuite, l'exploitation d'un document montre un amortissement des oscillations dont la compréhension constitue la suite de cette partie.
- La seconde partie porte sur les ondes internes créées également par l'oscillation d'un cylindre. De nouveau, cette partie commence par la mise en équations du mouvement. Puis, les équations du mouvement du fluide données par l'énoncé sont exploitées pour trouver la relation de dispersion des ondes ainsi que les propriétés des vitesses de phase et de groupe. Enfin, une analogie avec l'optique est proposée pour étudier la réflexion de telles ondes sur une surface.

Ce sujet est de difficulté inégale. Des questions simples sont disséminées au cours des deux parties, notamment parce que certaines questions peuvent être traitées par bloc. Globalement, ce sujet balaie la mécanique des fluides et un peu de mécanique du solide. Il constitue un bon socle de révision et d'approfondissement en ce qui concerne les ondes et leurs propriétés. Il est aussi un bon entraînement à l'exploitation de documents ainsi qu'aux calculs sans calculatrice, grâce à des applications numériques difficiles.

Indications

Partie I

2 Il faut exploiter les forces en jeu pour l'oscillation du cylindre.

3 Il est judicieux de réfléchir avec un schéma, notamment pour trouver le signe de δV_{im} par rapport à u et décomposer les volumes en volumes simples à calculer.

6 Pour le facteur de qualité, il faut mesurer de manière approximative le temps caractéristique de décroissance de l'enveloppe exponentielle de l'onde.

8 Les grandeurs caractéristiques de l'onde sont issues de l'oscillation du cylindre.

9 La force de traînée est, par définition, reliée au coefficient de traînée et s'oppose au mouvement du cylindre.

12 Pour interpréter la chronophotographie, on se placer à un instant donné, suivant une ligne horizontale, puis à une position donnée, suivant une ligne verticale.

13 La fréquence f'_{exp} s'obtient en mesurant la période suivant une ligne horizontale.

16 Le comportement limite est pour $k\,\mathrm{H} \ll 1$ et l'asymptotique pour $k\,\mathrm{H} \gg 1$.

17 Un milieu non dispersif est un milieu dont la vitesse de phase est indépendante de la longueur d'onde.

18 La vitesse de phase est la vitesse du front d'onde.

20 Pour obtenir l'énergie potentielle de pesanteur emmagasinée sur une longueur d'onde, il faut intégrer l'énergie élémentaire emmagasinée sur une longueur $\mathrm{d}x$.

22 Le volume déplacé par le cylindre correspond à $2\,|\delta V_{\text{im}}|$. Le volume des bosses se calcule en considérant deux ondes, l'une se propageant vers la droite et l'autre vers la gauche.

23 Le cylindre perd de l'énergie potentielle de pesanteur au cours du temps car il la transmet au fluide par l'intermédiaire du flux Φ_{p}, sans autre perte d'énergie.

Partie II

26 Le calcul de la poussée d'Archimède s'effectue en décomposant l'ordonnée y suivant $y = \mathrm{Y} + r\,\sin\theta$, avec r et θ les coordonnées du repère polaire $(\mathrm{G}, r, \theta, z)$.

27 La grandeur $\bar{\rho}$ est la moyenne de la masse volumique suivant la verticale.

29 Représenter les fronts d'onde d'amplitude nulle pour faire apparaître λ_x et λ_y.

33 La relation trouvée doit faire apparaître $\cos\theta$.

35 La vitesse de phase est donnée par $\overrightarrow{\mathrm{V}_\phi} = (\omega/k^2)\,\overrightarrow{k}$, avec k la norme de $\overrightarrow{k}$.

36 La vitesse de groupe est définie par

$$\overrightarrow{\mathrm{V}_{\text{g}}} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\,\overrightarrow{u_y}$$

38 Il faut exploiter toutes les propriétés de la question 37.

39 Il faut regarder comment évoluent les fronts d'onde définis pour une amplitude de l'onde constante.

40 Pour obtenir ω, on utilise la relation de dispersion de la question 32 en mesurant sur la cartographie λ_x la période spatiale de l'onde le long d'une ligne horizontale et λ_y le long d'une ligne verticale.

41 Comme le problème est supposé linéaire, la pulsation ω est conservée. De plus, la relation de dispersion s'applique au vecteur d'onde réfléchi.

42 Comme à la question précédente, seul l'angle avec l'horizontale est imposé, peu importe l'inclinaison de la paroi.

I. Ondes de surface

1 Appliquons le principe fondamental de la dynamique au cylindre à l'équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, où $\mathcal{V}_\mathrm{c}$ est le volume total du cylindre et $\mathcal{V}_\mathrm{im,éq}$ celui du cylindre immergé à l'équilibre.

$$\overrightarrow{0} = \rho_\mathrm{c}\,\mathcal{V}_\mathrm{c}\,\overrightarrow{g} - \rho\,\mathcal{V}_\mathrm{im,éq}\,\overrightarrow{g}$$

> L'action de l'air sur le cylindre est négligée par rapport à celle de l'eau étant donné que la masse volumique de l'air, $\rho_\mathrm{a} = 1{,}2\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, est bien plus faible que celle de l'eau, $\rho = 1 \cdot 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Comme on veut que $\mathcal{V}_\mathrm{im,éq} = \mathcal{V}_\mathrm{c}/2$, il vient que

$$\boxed{\rho_\mathrm{c} = \frac{\rho}{2} = \frac{1 \cdot 10^3}{2} \simeq 5 \cdot 10^2\ \mathrm{kg.m^{-3}}}$$

2 Tous les phénomènes dissipant de l'énergie mécanique, comme les effets visqueux et l'influence du fond du canal sur l'écoulement sont négligeables. L'oscillation verticale du cylindre est alors due à une compétition entre son poids et les forces de pression appliquées par les fluides. Bien que ces dernières soient influencées par la dynamique du cylindre, l'énoncé indique qu'elles sont assimilables à la poussée d'Archimède. De plus, comme à la question 1, les forces de pression dues à l'air sont négligeables par rapport à celles dues à l'eau.

Par conséquent, les grandeurs caractéristiques de cette compétition sont l'accélération de la gravité g, les masses volumiques du cylindre ρ_c et de l'eau ρ ainsi que la variation du volume immergé. La longueur permettant de caractériser le mouvement vertical - et donc la variation du volume immergé - est le diamètre du cylindre D, puisque la longueur L du cylindre est une longueur caractéristique horizontale.

La pulsation ω_0 dépend donc potentiellement des 4 grandeurs physiques que sont g, ρ_c, ρ et D. Ainsi, ${\omega_0}^2$ peut s'écrire

$${\omega_0}^2 = g^\alpha\,\mathrm{D}^\beta {\rho_\mathrm{c}}^\gamma\,\rho^\delta$$

où α, β, γ et δ sont quatre nombres réels. L'analyse dimensionnelle montre alors que

$$\alpha = 1 \qquad \beta = -1 \qquad \gamma = -\delta$$

soit

$$\boxed{{\omega_0}^2 \propto \frac{g}{\mathrm{D}}\left(\frac{\rho_\mathrm{c}}{\rho}\right)^\gamma}$$

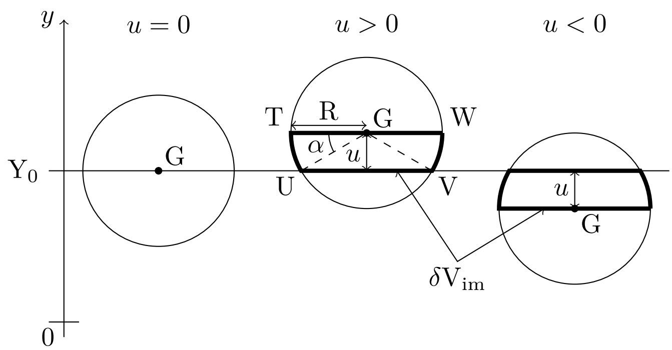
> Notons que d'après la question 1, le rapport ρ_c/ρ est fixé tel que $\rho_\mathrm{c}/\rho = 1/2$.

3 Prenons le cas où $u > 0$, ce qui n'enlève rien à la généralité de la formule que l'on va trouver. D'après le schéma ci-dessous, la valeur absolue de $\delta\mathrm{V_{im}}$ est la somme des volumes qui ont respectivement pour base

- le secteur TGU : on note ce volume $\mathcal{V}_\mathrm{TGU}$;
- le triangle isocèle UGV ($\mathcal{V}_\mathrm{UGV}$) ;
- le secteur VGW ($\mathcal{V}_\mathrm{VGW}$).

Par symétrie par rapport au plan vertical passant par G, $\mathcal{V}_\mathrm{VGW} = \mathcal{V}_\mathrm{TGU}$. Finalement,

$$|\delta\mathrm{V_{im}}| = 2\,\mathcal{V}_\mathrm{TGU} + \mathcal{V}_\mathrm{UGV}$$



Au premier ordre en $|u|/\mathrm{R}$ avec $|u| \ll \mathrm{R}$, on peut approcher le volume $\mathcal{V}_{\mathrm{UGV}}$:

$$\mathcal{V}_{\mathrm{UGV}} = \mathrm{L}\ |u|\ \sqrt{\mathrm{R}^2 + |u|^2} \approx \mathrm{L}\ |u|\ \mathrm{R}$$

Poursuivons avec le calcul de $\mathcal{V}_{\mathrm{TGU}}$ au premier ordre en $|u|/\mathrm{R}$. Étant donné que l'aire du secteur TGU représente une fraction $\alpha/2\pi$ de l'aire totale $\pi\,\mathrm{R}^2$ de la base du cylindre, avec $\alpha = \widehat{\mathrm{TGU}}$, on a

$$\mathcal{V}_{\mathrm{TGU}} = \mathrm{L}\,\pi\,\mathrm{R}^2\,\frac{\alpha}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \mathrm{Arctan}\left(\frac{|u|}{\mathrm{R}}\right) \approx \frac{|u|}{\mathrm{R}}$$

soit

$$\mathcal{V}_{\mathrm{TGU}} \approx \frac{\mathrm{L}\ |u|\ \mathrm{R}}{2}$$

En combinant les expressions des volumes $\mathcal{V}_{\mathrm{UGV}}$ et $\mathcal{V}_{\mathrm{TGU}}$, on obtient

$$|\delta \mathrm{V}_{\mathrm{im}}| \simeq 2\,\mathrm{L}\,\mathrm{R}\ |u|$$

Or, d'après le schéma ci-dessus, on constate que la variation algébrique du volume immergé par rapport à l'équilibre $\delta\mathrm{V}_{\mathrm{im}}$ est de signe opposé par rapport à l'écart à l'équilibre $u = \mathrm{Y} - \mathrm{Y}_0$. Ainsi,

$$\boxed{\delta \mathrm{V}_{\mathrm{im}} \simeq -2\,\mathrm{L}\,\mathrm{R}\,u}$$

> Cette expression s'interprète simplement en disant que comme u/R est très petit devant 1, $|\delta\mathrm{V}_{\mathrm{im}}|$ est assimilable au parallélépipède rectangle de longueur L et de base de côtés $2\,\mathrm{R}$ et $|u|$.

4 Appliquons le principe fondamental de la dynamique au cylindre oscillant de masse $\rho_{\mathrm{c}}\,\mathcal{V}_{\mathrm{c}}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen,

$$\rho_{\mathrm{c}}\,\mathcal{V}_{\mathrm{c}}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{Y}}{\mathrm{d}t^2}\,\overrightarrow{u_y} = \rho_{\mathrm{c}}\,\mathcal{V}_{\mathrm{c}}\,\overrightarrow{g} - \rho\,\mathcal{V}_{\mathrm{im}}\,\overrightarrow{g}$$

Soustrayons à cette équation celle caractérisant la position à l'équilibre Y_0 de la question 1 :

$$\rho_{\mathrm{c}}\,\mathcal{V}_{\mathrm{c}}\,\frac{\mathrm{d}^2(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}_0)}{\mathrm{d}t^2}\,\overrightarrow{u_y} = -\rho\,(\mathcal{V}_{\mathrm{im}} - \mathcal{V}_{\mathrm{im,éq}})\,\overrightarrow{g}$$

Soit

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{c}}}\,\frac{\delta\mathrm{V}_{\mathrm{im}}}{\mathcal{V}_{\mathrm{c}}}\,g$$

En combinant l'expression de $\delta\mathrm{V}_{\mathrm{im}}$ de la question 3, la valeur du rapport $\rho/\rho_{\mathrm{c}} = 2$ de la question 1 et la relation $\mathcal{V}_{\mathrm{c}} = \pi\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{L}$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\,u = 0 \quad \text{avec} \quad {\omega_0}^2 = \frac{8\,g}{\pi\,\mathrm{D}}}$$