X Maths B MP 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Devilliers (professeur en CPGE) ; il a été relu par Florian Metzger (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Le thème de cette épreuve d'analyse est le comportement asymptotique. On considère d'abord la probabilité d'un événement défini par des variables aléatoires dont le nombre tend vers l'infini. On cherche ensuite des équivalents simples d'intégrales dépendant d'un paramètre tendant vers $+\infty$.

- Dans la partie I, on étudie le comportement de $\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t]$ quand $n \to +\infty$ où S_n est la moyenne de n variables aléatoires $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n)$ indépendantes et de même loi dite *de Rademacher*. Cette partie est la plus abordable si on maîtrise le cours de probabilités de première année. Seule la question 8b contient une difficulté de rédaction pour la limite.
- Dans la partie II, on établit un équivalent, lorsque $t \to +\infty$, de l'intégrale
$$\int_a^b \mathrm{e}^{\,t\,f(x)}\,\mathrm{d}x$$
où f est une fonction définie sur $[\,a\,;b\,]$ suffisamment régulière. Ce résultat est appelé *méthode du col de Laplace*. Le sujet nous propose, en guise d'application, de redémontrer la fameuse formule de Stirling.
- Dans la troisième partie, proche de la précédente, la fonction exponentielle est remplacée par des fonctions sinusoïdales. On y établit un développement asymptotique, quand $a \to +\infty$, de
$$\int_0^a \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$
mais aussi un équivalent, quand $t \to +\infty$, de
$$\int_0^1 g(x)\sin(t\,f(x))\,\mathrm{d}x$$
avec f et g des fonctions satisfaisant encore une fois certaines propriétés de régularité.

Ce sujet démontre des résultats classiques, comme la semi-convergence de l'intégrale, dite *de Fresnel*,
$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$
ainsi que l'écriture de $n\,!$ sous forme d'une intégrale. Néanmoins, dans les parties II et III, des questions difficiles requièrent d'avoir plusieurs bonnes idées et initiatives avant d'aboutir.

Les outils de probabilités utilisés sont majoritairement issus du cours de première année. Le chapitre *Intégration sur un intervalle* joue un rôle important pour bien justifier les calculs. Pour les deux dernières parties, il faut également maîtriser les développements limités, la rédaction des limites avec les quantificateurs et le calcul d'intégrales.

Indications

Première partie

1 Utiliser l'inégalité de Markov.

2 Remarquer que $f(\mathrm{X}_i)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ pour une certaine fonction affine f. Montrer que si B est une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$, alors $\mathrm{P}[\mathrm{B} \geqslant n/2] \geqslant 1/2$.

3 Appliquer le résultat de la question 1 à $\exp(\lambda\, n\, \mathrm{S}_n)$. Justifier que les variables aléatoires $(\exp(\lambda\, \mathrm{X}_1), \ldots, \exp(\lambda\, \mathrm{X}_n))$ sont mutuellement indépendantes.

5a Calculer l'espérance comme un produit d'espérances grâce au résultat fourni par l'énoncé. Montrer ensuite que $\mathrm{E}[(\mathrm{X}_1 - m(\lambda)) \exp(\lambda \mathrm{X}_1)] = 0$.

5b Développer $(\mathrm{S}_n - m(\lambda))^2$ comme une double somme sur $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$. Traiter à part les cas $i = j$ et $i \neq j$.

6 Montrer que $\mathrm{I}_n(\lambda, \varepsilon) \exp(\lambda n(\mathrm{S}_n - m(\lambda) - \varepsilon)) \leqslant \mathrm{I}_n(\lambda, \varepsilon)$ et utiliser la croissance de l'espérance.

7 Idem que la question 6 avec $(1 - \mathrm{I}_n(\lambda, \varepsilon))\varepsilon^2 \leqslant (\mathrm{S}_n - m(\lambda))^2$.

8a Minorer $\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant m(\lambda) - \varepsilon]$ avec $\mathrm{E}[\mathrm{I}_n(\lambda, \varepsilon)\mathrm{D}_n(\lambda)]$ et utiliser les questions précédentes.

8b Fixer $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + t \in [\,0\,; 1\,[$, utiliser la question 4 pour trouver un λ tel que $m(\lambda) = \varepsilon + t$. Utiliser les résultats des questions 3 et 8a, pour avoir un encadrement de $\log \mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t]$. Comme $u_n(\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe un rang à partir duquel $|u_n(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$. Majorer alors λ de façon indépendante de ε, pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ avec un ε_0 bien choisi.

Deuxième partie

9 Utiliser un développement limité de f à l'ordre 2.

10 Découper, en trois morceaux, l'intégrale

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\,t\, f(x)}\, \mathrm{d}x$$

et démontrer que deux d'entre eux sont négligeables devant $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \mathrm{e}^{\,t\, f(x)}\, \mathrm{d}x$.

11 Appliquer l'inégalité de Taylor à l'ordre 2 à f. Majorer le reste en fonction de $(x - x_0)^2$. Obtenir un encadrement de $\mathrm{e}^{\,t\, f(x)}$. Faire un changement de variable pour se ramener à une intégrale de $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{e}^{\,-\mathrm{X}^2}$.

12b Mettre l'intégrande trouvé à la question 12a sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\,n\, f(x)}$ où f est une certaine fonction, quitte à faire un changement de variable.

Troisième partie

13 Trouver une partie de $\mathbb{R}_+$, la plus grande possible, sur laquelle $x \mapsto \sin(x^2)$ est plus grande que $1/2$, puis comparer les intégrales.

15 Intégrer par parties en intégrant $x \mapsto 2x\, \sin(x^2)$. On pourra aussi passer par l'exponentielle complexe.

16 Intégrer par parties successivement jusqu'à obtenir une intégrale en $\mathrm{O}(a^{-5})$.

17 Intégrer par parties en intégrant $x \mapsto t\, \sin(t\, f(x))$.

19 Procéder au changement de variable $u = h(x)/h(1)$. Appliquer le résultat de la question 17. Procéder alors à un nouveau changement de variable pour utiliser le résultat de la question 16.

Première partie

1 Soient $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, les évènements $(Z \geqslant t)$ et $(\exp(\lambda Z) \geqslant \exp(\lambda t))$ sont égaux. De plus, $\exp(\lambda Z)$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance finie. L'inégalité de Markov s'applique alors à $\exp(\lambda Z)$:

$$P[Z \geqslant t] = P[\exp(\lambda Z) \geqslant \exp(\lambda t)] \leqslant \frac{1}{\exp(\lambda t)} E[\exp(\lambda Z)]$$

En conclusion, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda > 0 \qquad P[Z \geqslant t] \leqslant \frac{1}{\exp(\lambda t)} E[\exp(\lambda Z)]}$

2 Montrons d'abord un résultat sur les variables aléatoires images de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui n'est pas au programme de MP mais qui sera utile plusieurs fois dans ce sujet. Soient $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ des variables mutuellement indépendantes et, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i une fonction réelle définie sur $U_i(\Omega)$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, posons $V_i = f_i(U_i)$. Les variables $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ sont alors mutuellement indépendantes. En effet, soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (V_i = x_i)\right] &= P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (f_i(U_i) = x_i)\right] \\
&= P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \in {f_i}^{-1}(\{x_i\}))\right] \\
\text{par indépendance mutuelle :} \qquad &= \prod_{i=1}^{n} P[U_i \in {f_i}^{-1}(\{x_i\})] \\
&= \prod_{i=1}^{n} P[f(U_i) = x_i] \\
P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (V_i = x_i)\right] &= \prod_{i=1}^{n} P[V_i = x_i]
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Posons $Y_i = X_i/2 + 1/2$. Observons que

$$(Y_i = 1) = (X_i = 1) \qquad \text{et} \qquad (Y_i = 0) = (X_i = -1)$$

Dès lors, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. De plus, pour tout entier $i \in [\![1\,;n]\!]$, Y_i est une variable aléatoire image de X_i. D'après le résultat démontré en début de question, comme $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ le sont aussi. Il en découle que

$$B = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$. Connaissant la loi de B, on peut affirmer

$$P[B \geqslant n/2] = \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
P[B \leqslant n/2] &= \sum_{0 \leqslant p \leqslant n/2} \binom{n}{p} \frac{1}{2^n} = \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{n-k} \frac{1}{2^n} && (k = n - p) \\
&= \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} && \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\
P[B \leqslant n/2] &= P[B \geqslant n/2]
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$1 = \mathrm{P}[(\mathrm{B} \leqslant n/2) \cup (\mathrm{B} \geqslant n/2)] \leqslant \mathrm{P}[\mathrm{B} \leqslant n/2] + \mathrm{P}[\mathrm{B} \geqslant n/2] = 2\mathrm{P}[\mathrm{B} \geqslant n/2]$$

Dès lors, $\mathrm{P}[\mathrm{B} \geqslant n/2] \geqslant 1/2$. Comme $\mathrm{B} = n\mathrm{S}_n/2 + n/2$, on a les égalités d'évènements

$$(\mathrm{B} \geqslant n/2) = (n\mathrm{S}_n/2 + n/2 \geqslant n/2) = (n\mathrm{S}_n \geqslant 0) = (\mathrm{S}_n \geqslant 0)$$

Deux évènements égaux ayant même probabilité, on en conclut que

$$\boxed{\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant 0] \geqslant \frac{1}{2}}$$

3 Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. En tant que variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs, $\exp(\lambda\, n\, \mathrm{S}_n)$ est d'espérance finie. D'après la question 1, et en utilisant que l'exponentielle est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ et $n > 0$,

$$\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t] = \mathrm{P}[n\,\mathrm{S}_n \geqslant t\,n] \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\,t\,n}\mathrm{E}[\exp(\lambda\,n\,\mathrm{S}_n)] = \mathrm{e}^{-\lambda\,t\,n}\mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda\,\mathrm{X}_i)\right]$$

Comme $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, d'après le résultat démontré au début de la question 2, les variables aléatoires

$$(\exp(\lambda\,\mathrm{X}_1), \exp(\lambda\,\mathrm{X}_2), \ldots, \exp(\lambda\,\mathrm{X}_n))$$

sont mutuellement indépendantes. De plus, ces variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs, elles admettent une espérance. En utilisant le résultat fourni par l'énoncé, il vient

$$\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t] \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\,t\,n}\mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda\,\mathrm{X}_i)\right] = \mathrm{e}^{-\lambda\,t\,n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[\exp(\lambda\,\mathrm{X}_i)]$$

Soit $i \in [\![1\,; n]\!]$. À l'aide de la formule de transfert appliquée à $\exp(\lambda\,\mathrm{X}_i) = f(\mathrm{X}_i)$ avec $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda\,x}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\exp(\lambda \mathrm{X}_i)] &= f(1)\mathrm{P}[\mathrm{X}_i = 1] + f(-1)\mathrm{P}[\mathrm{X}_i = -1] \\ &= \frac{\exp(\lambda) + \exp(-\lambda)}{2} \\ \mathrm{E}[\exp(\lambda \mathrm{X}_i)] &= \mathrm{ch}\,(\lambda) \end{aligned} \qquad (\mathbf{1})$$

En reportant ce résultat dans la majoration précédente de $\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t]$, on trouve

$$\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t] \leqslant \exp(-\lambda\,t\,n)\,\mathrm{ch}\,(\lambda)^n$$

Notons que $\mathrm{ch}\,(\lambda) \geqslant 1 > 0$. En outre, le logarithme est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, il vient

$$\log(\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t]) \leqslant \log(\exp(-\lambda\,t\,n)\,\mathrm{ch}\,(\lambda)^n) = -\lambda\,t\,n + n\log(\mathrm{ch}\,(\lambda))$$

> On rappelle que $\log(0) = -\infty$ par convention du sujet. Par conséquent, on n'a pas besoin de séparer les cas $\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t] = 0$ et $\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t] > 0$.

En divisant par $n \geqslant 1$, on obtient

$$\frac{1}{n}\log(\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t]) \leqslant \psi(\lambda) - \lambda t$$

Et ce pour tout $\lambda > 0$. De plus, pour $\lambda = 0$, puisque $\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t] \leqslant 1$,

$$\frac{1}{n}\log(\mathrm{P}[\mathrm{S}_n \geqslant t]) \leqslant 0 = \psi(0) - 0t$$