

Mines Maths 1 MP 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Ce problème s'intéresse aux sous-espaces vectoriels \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$ qui ne contiennent que des endomorphismes nilpotents. L'objectif du problème est de montrer qu'un tel espace \mathcal{V} a toujours une dimension inférieure ou égale à $n(n-1)/2$, puis de déterminer les sous-espaces de ce type qui sont de dimension maximale. Plus précisément, on montre que dans ce cas il existe une base B de E telle que tout élément de \mathcal{V} est représenté dans B par une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire avec des zéros sur la diagonale). On dit que l'on a fait une « réduction simultanée » des endomorphismes de \mathcal{V} . La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E . Il s'agit d'un résultat relativement récent (théorème de Gerstenhaber, 1958).

- Dans la première partie, on montre quelques résultats techniques sur les endomorphismes nilpotents. Les questions de cette partie sont de bons exercices d'algèbre linéaire.
- Dans la deuxième partie, on met en place un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 à l'aide d'une opération \otimes définie à partir d'un produit scalaire. Cet outil sera utilisé dans la démonstration du théorème. Cette partie est plus abstraite que la précédente et demande de la rigueur conceptuelle.
- Dans la troisième partie, on montre deux lemmes qui sont au cœur de la démonstration du théorème : une identité sur les traces des endomorphismes de \mathcal{V} et une condition suffisante pour avoir un vecteur qui annule tous les endomorphismes de \mathcal{V} . La difficulté de cette partie provient des notations. On y utilise une généralisation de la formule du binôme de Newton dans le cas de deux endomorphismes qui ne commutent pas.
- La quatrième partie est la plus longue et contient la démonstration du théorème, par récurrence sur la dimension de E . On montre l'existence d'un vecteur x qui annule simultanément tous les endomorphismes de \mathcal{V} et on travaille ensuite avec la restriction de ces endomorphismes sur l'hyperplan $\text{Vect}(x)^\perp$. Cette partie utilise tous les résultats des parties précédentes et demande encore une fois d'assimiler de nouvelles notations.

Ce problème étudie principalement des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ et des applications entre ces sous-espaces, ce qui permet de se confronter à un niveau d'abstraction élevé. Son originalité vient de ce qu'il privilégie les approches spatiale et vectorielle en limitant au maximum l'utilisation des matrices.

Si l'on admet le résultat de la première question, il peut être traité intégralement en fin de première année. Il constitue un bon entraînement sur le programme d'algèbre linéaire de MPSI.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Montrer que toute matrice M qui représente u est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis semblable à une matrice de T_n^{++} .
- 2 Donner un isomorphisme entre \mathcal{N}_B et $T_n^{++}(\mathbb{R})$, puis chercher une base de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ constituée de matrices élémentaires.
Pour le caractère nilpotent, montrer par récurrence sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ que $u^k(e_j)$ appartient à F_{n-k} pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, où F_{n-k} est l'espace engendré par les $n - k$ premiers vecteurs de la base B .
- 3 Pour l'inclusion $\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_B\} \subset \llbracket 1; n \rrbracket$, utiliser le résultat de la question 4 qui ne dépend pas de ce que l'on démontre ici.
Pour l'inclusion $\llbracket 1; n \rrbracket \subset \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_B\}$, considérer l'endomorphisme de E tel que $u(e_i) = 0$ si $i = 1$ ou $k + 1 \leq i$ et $u(e_i) = e_{i-1}$ sinon, avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé.
- 4 Appliquer successivement $u^{p-1}, u^{p-2}, \dots, u$ à une relation linéaire entre les vecteurs de la première famille.
Pour la deuxième famille, appliquer d'abord u^q puis poser $z = u^{p-q}(x)$ et appliquer successivement u^{q-1}, \dots, u .
- 5 Montrer d'abord que $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$. À l'aide de la question 4, prouver ensuite que si $z \in \text{Im}(u^{p-1}) \setminus \{0\}$, alors tout vecteur de $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$ est colinéaire à z .

Partie II

- 6 Montrer que $a \otimes x$ est dans l'ensemble d'arrivée indiqué, pour tout $a \in E$. Établir ensuite que $a \mapsto a \otimes x$ est linéaire et injective. Justifier enfin que l'ensemble d'arrivée a la même dimension que E .
- 7 Compléter x en une base de E et écrire la matrice de $a \otimes x$ dans cette base.

Partie III

- 8 Procéder par récurrence pour l'existence et les valeurs de $f_0^{(k)}$ et $f_1^{(k)}$.
- 9 Justifier que $(u + tv)^p = 0$ et utiliser l'unicité de la relation démontrée à la question 8.
- 10 À l'aide des propriétés de la trace, simplifier $\text{Tr}(f_1^{(k+1)})$ à partir de sa valeur donnée à la question 8. Montrer ensuite que $(u + tv)^{k+1}$ est de trace nulle et développer cette expression.
- 11 Établir que $t \mapsto (a \mid (u + tv)^{p-1}(y))$ est la fonction nulle, puis que c'est une fonction polynomiale en t . Utiliser l'égalité $(\mathbb{K}(\mathcal{V})^\perp)^\perp = \mathbb{K}(\mathcal{V})$.
- 12 Prouver l'existence par récurrence sur k . Considérer ensuite le cas $k = p$.

Partie IV

- 13 Montrer que $v \mapsto v(x)$ et $u \mapsto \bar{u}$ sont linéaires.
- 14 Appliquer le théorème du rang à $v \mapsto v(x)$ et $u \mapsto \bar{u}$ et voir $\mathcal{V}x, \mathcal{W}, \bar{\mathcal{V}}$ et \mathcal{Z} comme noyaux ou images de ces applications.
- 15 Justifier que $\mathcal{Z} \subset \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$ et utiliser l'isomorphisme de la question 6.

- 16 Noter $v = a \otimes x$ et montrer que $u^k v = a \otimes u^k(x)$. Appliquer ensuite le lemme A et la question 7.
- 17 Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'a pas de valeur propre non nulle. Obtenir alors que $\text{Vect}(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont en somme directe.
- 18 Établir la relation par récurrence sur k .
- 19 Appliquer une partie de l'hypothèse de récurrence à $\bar{\mathcal{V}}$, puis utiliser les résultats des questions 14, 15 et 17.
- 20 Combiner les informations obtenues aux questions 14, 15, 17, 18 et 19.
- 21 Appliquer l'hypothèse de récurrence à $\bar{\mathcal{V}}$ pour obtenir une base B' de H et montrer que $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{N}_{B'}$. Compléter ensuite B' par le vecteur x .
- 22 Avec la question 5, montrer que $\text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(v^{k-1}(x))$ où k est le plus petit entier tel que $v^k(x) = 0$. Utiliser ensuite la question 20.
- 23 Justifier que $t \mapsto (v + tv_0)(x)$ s'annule au plus une fois sur \mathbb{R} et en déduire que

$$\text{Im}((v + tv_0)^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

Considérer ensuite $f(t) = (a | (v + tv_0)(y))$ pour $t \in \mathbb{R}$, $a \in (\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^\perp$, et $y \in E$.

- 24 Raisonner par l'absurde.

I. GÉNÉRALITÉS SUR LES ENDOMORPHISMES NILPOTENTS

1 Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Soit B une base de E et $M = \text{Mat}_B(u)$. Il est possible de voir M comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après un corollaire du théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique χ_M de M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le cours, toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. Par suite, la matrice M est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Comme M et T sont semblables, les matrices M^k et T^k sont semblables pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les coefficients diagonaux de T . Comme T est triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux de T^k sont $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme u est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On a alors $M^p = 0$ (car M^p représente u^p) donc $T^p = 0$, d'où $\lambda_1^p = \dots = \lambda_n^p = 0$ et $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi, les coefficients diagonaux de T sont nuls. Dès lors, pour tout entier naturel k non nul, comme la trace est un invariant de similitude, il vient

$$\text{Tr}(u^k) = \text{Tr}(M^k) = \text{Tr}(T^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = 0$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{Tr}(u^k) = 0}$$

Il est possible de montrer que la réciproque est vraie: si un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie vérifie $\text{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors u est nilpotent. Cette propriété caractérise donc les endomorphismes nilpotents.

Pour démontrer cette réciproque, on raisonne par l'absurde en supposant qu'une matrice M qui représente u a au moins une valeur propre complexe non nulle. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ toutes les valeurs propres complexes non nulles de M (deux à deux distinctes) et n_1, \dots, n_r leurs multiplicités respectives. Comme M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{Tr}(M^k) = \text{Tr}(u^k) = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^k = 0$$

En regardant les r premières équations ainsi obtenues pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on voit que (n_1, \dots, n_r) est solution d'un système homogène dont le déterminant D est de type Vandermonde:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \dots & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \dots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = (\lambda_1 \dots \lambda_r) \times \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

Celui-ci est non nul car les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont tous non nuls et deux à deux distincts. On en déduit que $(n_1, \dots, n_r) = (0, \dots, 0)$, ce qui est absurde. Par suite, $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$. Le polynôme caractéristique de M étant scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il vaut $\chi_M = X^n$, d'où $M^n = 0$ (Cayley-Hamilton), puis $u^n = 0$.

2 D'après le cours, l'application $\Phi_B : u \mapsto \text{Mat}_B(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition, $\mathcal{N}_B = \Phi_B^{-1}(\text{T}_n^{++}(\mathbb{R}))$, donc les ensembles \mathcal{N}_B et $\text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont en bijection par l'isomorphisme Φ_B . Montrons que l'ensemble $\text{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$. En notant $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il vient

$$\text{T}_n^{++} = \text{Vect}(E_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n)$$