e3a Mathématiques MP 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (professeur en CPGE) ; il a été relu par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de 5 exercices indépendants.

- Dans le court exercice 1, on s'intéresse à deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique sur $\mathbb{N}$.
- L'exercice 2 étudie la suite de fonctions
$$\mathrm{P}_n : x \longmapsto \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$$
On montre sa convergence normale sur $\mathbb{R}$ vers φ et l'intégrabilité de $1/\varphi$.
- L'exercice 3, le plus long, est consacré à l'étude d'endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ des suites indexées par $\mathbb{Z}$ convergentes en $+\infty$ et en $-\infty$
$$\mathrm{T} : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n-1} + x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} : (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$$
En particulier, on détermine le spectre de T et on montre que S est une isométrie pour une certaine norme sur $\mathscr{C}$, non équivalente à la norme infinie usuelle sur les suites bornées.
- L'exercice 4 porte sur l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire
$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$
On y détermine une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^{\perp}$.
- Enfin, l'exercice 5 a pour but de démontrer le lemme de Cesàro à l'aide d'intégrales de suites de fonctions.

Cet ensemble d'exercices ne pose pas de difficulté majeure, tout en demandant d'avoir bien compris les notions essentielles du programme des deux années. Il en utilise les principaux chapitres : algèbre linéaire, espaces euclidiens, suites et séries, probabilités et variables aléatoires discrètes, intégrabilité, suites et séries de fonctions. Il constitue un bon sujet de révisions et d'entraînement pour tester sa maîtrise des notions du cours.

Indications

Exercice 1

1 Justifier la sommabilité de la famille $(p\,q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et calculer sa somme.

2 Remarquer que $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + 1$ suit une loi géométrique.

3 Prouver d'abord que $\mathbb{P}(\mathrm{X} < \mathrm{Y}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > \mathrm{Y})$.

4 Remarquer que $\{\mathrm{S} = n\} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \{\mathrm{X} = k\} \cap \{\mathrm{Y} = n-k\}$.

Exercice 2

1 Utiliser la positivité de ch et l'inégalité $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ pour tout x.

2 Justifier la convergence de la série $\sum \ln\operatorname{ch}(x/k)$ à l'aide du développement limité $\operatorname{ch} x = 1 + x^2/2 + \mathrm{o}_{x\to 0}(x^2)$.

3.1 Montrer d'abord que P_n est paire et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

3.2 Montrer que la convergence de $\ln(\mathrm{P}_n)$ vers $\ln\varphi$ est uniforme sur tout segment du type $[\,-a\,;a\,]$ avec $a > 0$.

4.1 Revenir à la définition de $\operatorname{ch} t$ puis utiliser le changement de variable $u = \mathrm{e}^{\,t}$.

4.2 Remarquer que $\mathrm{P}_n(x) \geqslant \operatorname{ch} x$ pour tout x et tout $n \geqslant 1$.

Exercice 3

2 Le cours assure que l'ensemble des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4 Commencer par montrer que $\mathrm{T}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.

5 Interpréter F et G comme des noyaux d'endomorphismes construits avec S.

6 Faire apparaître F et G.

7.1 Traduire $x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ par une relation de récurrence linéaire pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire son expression. Montrer que cette expression est encore vraie pour $n < 0$. On remarquera que les racines de l'équation caractéristique sont inverses l'une de l'autre.

7.2 Utiliser le résultat de la question 7.1.

7.3 La même technique que celle utilisée à la question 7.1 fonctionne.

8.1 Penser au résultat de la question 3.

8.3 Une isométrie est une application 1-lipschitzienne.

8.4 Un noyau est une image réciproque de $\{0\}$.

8.5 Utiliser la suite $v^{(p)}$ valant 1 en $n = p$ et 0 ailleurs.

Exercice 4

3 $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]^\perp$ se caractérise par son orthogonalité à 1 et X.

4 Si $\mathrm{L} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, que vaut $\langle \mathrm{L}\,,\,\mathrm{L}\rangle$?

4.2.1 Décomposer L sur la base canonique et calculer explicitement l'intégrale dont on justifiera qu'elle converge au moins pour $x > -1$.

4.2.2 Les pôles sont donnés par la question 4.2.1, justifier qu'ils sont simples. Les zéros par la condition $\mathrm{L} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^\perp$. Considérer la mise au même dénominateur de la fraction rationnelle. On montrera que tous les coefficients de L sont non nuls.

4.2.3 On connaît les racines du numérateur de φ donc on peut le factoriser.

4.3 Remarquer que $\dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]^\perp = 1$ et que L en est une base.

Exercice 5

1 La fonction f_n est continue par morceaux sur un segment. Appliquer la relation de Chasles.

2 Utiliser $f_n(t) = w_k$ où $(k-1)/n \leqslant t < k/n$ pour $t \neq 1$.

3 Si $t \neq 0$, $\lfloor nt \rfloor \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

4 Appliquer le théorème de convergence dominée à f_n en remarquant qu'une suite convergente est bornée.

Exercice 1

1 Comme $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, il suffit de vérifier que l'on a bien des lois de variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mathbb{P})$. Or, pour tout $p\in\,]\,0\,;1\,[$, on a $q=1-p\in\,]\,0\,;1\,[$, donc la série géométrique $\sum q^k$ de raison q converge d'après le cours et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$$

de sorte que $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}p\,q^k=p\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=1$$

Comme $p\,q^k\geqslant 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, on obtient bien

$$\boxed{\text{La suite } (p\,q^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ définit une loi de variable aléatoire sur } \mathbb{N}.}$$

> L'énoncé demande de vérifier que $\mathbb{P}_{\mathrm{X}}$, la loi image de X, est bien une probabilité. Cela est incongru, puisque si X est une variable aléatoire discrète bien définie, alors le cours donne cette propriété... Autrement dit, on demande ici implicitement de vérifier la bonne définition des variables aléatoires X et Y.

2 On remarque que $\mathrm{Z}=\mathrm{X}+1$ suit la loi géométrique de paramètre p puisque

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\qquad \mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)=\mathbb{P}(\mathrm{X}=k-1)=p\,q^{k-1}$$

Il vient alors que Z admet une espérance et $\mathrm{E}(\mathrm{Z})=1/p$, d'où par linéarité

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La variable aléatoire X admet une espérance et}\\ \mathrm{E}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{Z}-1)=\mathrm{E}(\mathrm{Z})-1=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{1-p}{p}=\dfrac{q}{p}\end{array}}$$

> On peut aussi refaire le calcul en utilisant le développement en série entière de la dérivée de $u\mapsto 1/(1-u)$:
>
> $$p\sum_{k=0}^{+\infty}k\,q^k=p\sum_{k=1}^{+\infty}k\,q^k=p\,q\sum_{k=1}^{+\infty}k\,q^{k-1}=p\,q\times\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{q}{p}$$

3 Remarquons que l'on a l'union disjointe

$$\{\mathrm{X}=\mathrm{Y}\}=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left(\{\mathrm{X}=k\}\cap\{\mathrm{Y}=k\}\right)$$

de sorte que, par σ-additivité de $\mathbb{P}$, indépendance et égalité en loi de X et Y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})&=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{\mathrm{X}=k\}\cap\{\mathrm{Y}=k\})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)\cdot\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}p^2\,q^{2k}=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k=p^2\frac{1}{1-q^2}=\frac{p^2}{(1-q)(1+q)}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\left|q^2\right|<1$ pour la convergence de la série. Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y})=\frac{p}{1+q}=\frac{p}{2-p}}$$