

X/ENS Physique PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Émilie Frémont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Thomas Dupic (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à l'étude de problématiques physico-chimiques intervenant dans la conception et l'utilisation de ressorts. Il est constitué de deux parties indépendantes, elles-mêmes scindées en sous-parties peu liées.

- Dans la première partie, la conception et la fabrication des ressorts sont au cœur du questionnement. L'objectif est tout d'abord de relier les propriétés mécaniques d'un ressort à ses dimensions géométriques. Puis on s'intéresse à plusieurs aspects des traitements thermique et électrochimique appliqués à ces pièces lors de leur fabrication.
- La seconde partie traite de la propagation d'ondes mécaniques au sein d'un ressort. La première sous-partie suit un cheminement classique en physique des ondes : établissement de l'équation de propagation puis étude de la dispersion et de l'atténuation dans le milieu. La suite, plus originale, est consacrée à l'étude de deux situations concrètes dans lesquelles ces ondes interviennent.

Ce problème de longueur raisonnable est de difficulté relativement modeste pour le concours X/ENS. Son énoncé bien construit et progressif en fait un excellent problème de révisions pour tous les étudiants de deuxième année, quels que soient leurs objectifs aux concours.

Quelques maladresses, notamment dans le choix des notations, sont à déplorer, sans que cela nuise à la compréhension des attentes du sujet. Les questions d'applications numériques, à réaliser sans calculatrice, constituent un bon entraînement en vue des épreuves écrites et orales.

Enfin, rappelons que plus une épreuve est « simple », plus les correcteurs sont exigeants sur la rédaction.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Pour établir l'expression de k , penser à effectuer un développement limité de U au voisinage de la longueur à l'équilibre a_0 .
- 2 Déterminer le nombre de ressorts liant les plans P_1 et P_2 , puis la force exercée par chacun d'entre eux.
- 6 Remarquer que la force \vec{F} exercée par l'opérateur et la force exercée par la partie inférieure du ressort forment un couple.
- 9 Il faut bien réfléchir à l'algébrisation de la loi de Newton avant de l'utiliser dans un bilan énergétique.
- 10 Attention à ne pas confondre la surface de contact métal-air avec la section droite du fil considérée dans les questions 6 à 8.
- 14 Quelle demi-réaction souhaite-t-on forcer au niveau de l'électrode constituée par le ressort ?
- 16 Ne pas oublier que le pH de la solution électrolytique étudiée vaut 5.

Partie II

- 17 Lorsque deux ressorts sont associés en série, la force de rappel est uniforme dans tout le système.
- 18 Le signe $-$ figurant dans l'expression fournie par l'énoncé doit être justifié précisément, par un argument physique simple.
- 19 L'équation à établir est évidemment

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

- 20 L'énergie \mathcal{E}_f correspond à l'opposé du travail de la force de frottement fluide sur une oscillation.
- 21 On peut tout à fait, pour simplifier l'étude, raisonner à l'instant $t = 0$.
- 23 Expliciter la force de frottement fluide en exploitant les notations complexes.
- 28 Comparer les effets des pertes structurales sur les différentes composantes spectrales du signal créneau.
- 30 La condition aux limites en $x = \ell_0$ est l'équation du mouvement de la masse m .
- 31 Pour la résolution graphique, essayer de se ramener à une construction faisant intervenir l'intersection d'une droite avec la courbe d'une fonction usuelle.
- 34 Même si ce n'est pas dit explicitement, il faut désormais prendre en compte l'influence de la pesanteur.
- 35 Au niveau d'une extrémité libre, la force de tension s'annule.
- 37 On pourra supposer que le régime est stationnaire pour $t < 0$.
- 39 La condition initiale peut être rapprochée d'une série de Fourier.
- 40 Il y a une erreur de signe dans la relation à établir.

I. CARACTÉRISATIONS ET TRAITEMENTS

1 La distance a_0 entre 2 atomes voisins correspond à la distance qui permet de minimiser l'énergie potentielle d'interaction entre ces deux atomes. Si, à un instant donné, les deux atomes sont tels que $a < a_0$, alors la répulsion électrostatique des nuages électroniques va tendre à repousser les deux atomes l'un de l'autre, à la manière d'un ressort que l'on aurait comprimé. À l'inverse, si les deux atomes sont tels que $a > a_0$, le caractère attractif de la liaison covalente va tendre à rapprocher les deux atomes, à la manière d'un ressort que l'on aurait préalablement étiré.

Évidemment, la modélisation de la liaison par un ressort suppose que la relation entre la force de « rappel » et l'allongement algébrique de la liaison puisse être considérée comme linéaire, ce qui restreint l'application de ce modèle aux déformations de faible amplitude, pour lesquelles

$$|a - a_0| \ll a_0$$

Dans ce cadre, en notant $U(a)$ l'énergie d'interaction entre deux atomes, on peut effectuer un développement limité de U au voisinage de la position d'équilibre a_0 . Sachant que $U'(a_0) = 0$, on obtient au premier ordre non nul en $a - a_0$

$$U(a) \approx U(a_0) + \frac{(a - a_0)^2}{2} \times U''(a_0)$$

Par analogie avec l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k , on identifie alors la raideur de la liaison à

$$k = U''(a_0)$$

2 Dans les plans P_1 et P_2 , chaque atome occupe la surface a_0^2 ; il y a ainsi $N = S/a_0^2$ ressorts entre les deux plans. La force \vec{F} appliquée au fil se répartit équitablement entre ces N ressorts, de sorte que l'on peut écrire

$$\frac{F}{N} = k(a - a_0)$$

Par suite, l'énergie élastique \mathcal{E}_{el} emmagasinée entre les plans P_1 et P_2 est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{el}} &= N \times \frac{1}{2} k (a - a_0)^2 \\ &= N \times \frac{1}{2k} \left(\frac{F}{N} \right)^2 \\ \mathcal{E}_{\text{el}} &= \frac{a_0^2}{S} \times \frac{F^2}{2k} \end{aligned}$$

Conformément aux indications de l'énoncé, le fil se rompt lorsque cette énergie devient supérieure ou égale à l'énergie $2\gamma S$ nécessaire pour créer deux interfaces métal-air d'aire S . En se plaçant à la limite de la rupture, on obtient donc

$$F_{\text{max}} = \frac{2S\sqrt{\gamma k}}{a_0}$$

On vérifie que F_{max} augmente avec la section S du fil, l'énergie surfacique γ et la raideur k du ressort modélisant chaque liaison, ce qui est cohérent physiquement. En ce qui concerne l'influence du paramètre a_0 , on peut raisonnablement considérer que les liaisons sont d'autant plus fortes que a_0 est petit, ce qui permet d'expliquer pourquoi F_{max} diminue quand a_0 augmente.

3 La contrainte σ est définie comme le rapport F/S . En présence de cette contrainte, et en supposant que le fil est uniformément déformé sur toute sa longueur, l'allongement relatif ε vaut

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{a - a_0}{a_0}$$

soit encore

$$\varepsilon = \frac{1}{a_0} \times \frac{F}{Nk} = \frac{a_0}{k} \times \frac{F}{S}$$

On en déduit par identification avec la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ que

$$k = Ea_0$$

ce qui permet de réécrire le résultat de la question précédente sous la forme

$$F_{\max} = 2S \sqrt{\frac{\gamma E}{a_0}}$$

4 Commençons par déterminer un ordre de grandeur de la distance a_0 en raisonnant sur la structure cristalline du fer à température ambiante. Dans un réseau cubique centré, chaque maille présente un volume a_0^3 et contient deux atomes (1 atome au centre de la maille et 8 atomes au niveau des sommets du cube, qui comptent chacun pour 1/8). La masse volumique du fer s'exprime alors selon

$$\rho_{\text{Fe}} = \frac{2M_{\text{Fe}}}{N_A a_0^3}$$

On en déduit l'expression, puis l'estimation numérique, du paramètre de maille

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{2M_{\text{Fe}}}{N_A \rho_{\text{Fe}}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 56}{6 \cdot 10^{23} \times 7,9 \cdot 10^6}} \approx (23 \cdot 10^{-30})^{1/3} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

en se limitant à un seul chiffre significatif.

À partir de l'expression établie à la question 3, on calcule ensuite

$$\begin{aligned} F_{\max} &= 2S \sqrt{\frac{\gamma_{\text{Fe}} E_{\text{Fe}}}{a_0}} \\ &= 2 \times 5 \cdot 10^{-6} \times \sqrt{\frac{2,0 \times 2,1 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^{-10}}} \\ &= 10^{-5} \times (14 \cdot 10^{20})^{1/2} \end{aligned}$$

soit

$$F_{\max} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Ce dernier résultat laisse entendre que l'on peut soulever une masse d'environ 40 tonnes à l'aide d'un fil de fer de section $S = 5 \text{ mm}^2$, ce qui paraît surestimé. Typiquement, les câbles en acier qui équipent les grues de chantier ont une « résistance » à la traction de l'ordre de $200 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-2}$. Avec cet ordre de grandeur, on obtient plutôt une force maximale de l'ordre de 10^4 N .

5 Plusieurs éléments du modèle peuvent être remis en cause pour tenter d'expliquer l'écart observé entre les valeurs théorique et expérimentale de F_{\max} :

- Toutes les liaisons interatomiques sollicitées lors de l'application de la force \vec{F} ne sont pas nécessairement exactement parallèles à la direction de cette dernière. Par suite, la force \vec{F} ne se répartit pas uniformément entre les différentes chaînes d'atomes et certaines chaînes sont davantage sollicitées que d'autres. Ces chaînes rompent donc plus tôt que ne le prévoit le modèle.