# Centrale Maths 2 PSI 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS Lyon) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet porte sur les matrices et endomorphismes nilpotents. Le principal théorème qui y est démontré concerne une réduction particulière des endomorphismes, appelée réduction de Jordan, dans le cas des endomorphismes nilpotents.

- La première partie présente des résultats sur les endomorphismes nilpotents ainsi que la réduction de Jordan dans un cas particulier. Elle s'achève par une étude de l'existence et de la valeur de racines carrées de certaines matrices nilpotentes.
- La seconde partie a pour but de démontrer l'existence et l'unicité de la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents, ainsi que quelques-unes de ses applications. On démontre notamment des critères de similitude pour des matrices nilpotentes, et on met en œuvre la réduction de Jordan sur un exemple. Enfin, un passage plus combinatoire fait le lien entre cette réduction et les partitions d'un entier naturel ; on y calcule le cardinal maximal d'un ensemble de matrices nilpotentes de même taille tel qu'il ne contienne pas deux matrices semblables.

Ce sujet était déstabilisant pour les candidats. D'un côté, les endomorphismes nilpotents sont des classiques des concours, la réduction de Jordan avait pu être vue en DM et certaines questions font appel à des raisonnements classiques. De l'autre, les théorèmes de diagonalisation sont peu utilisés, contrairement à la trigonalisation et au théorème de Cayley-Hamilton, et la difficulté n'est guère progressive puisque les questions faciles et difficiles alternent tout au long du problème. Il est donc adapté à une révision fine de l'algèbre linéaire, en complément d'un sujet faisant appel aux mécanismes usuels de réduction des endomorphismes.

## Indications

### I - Premiers résultats

3 Considérer une combinaison linéaire nulle des vecteurs en question. Appliquer alors à cette combinaison linéaire des puissances de $u$ bien choisies. Pour la seconde partie de la question, remarquer qu'il suffit de prouver $p \leqslant 2$.

4 Utiliser le fait que $u^2 = 0$ pour prouver une inclusion, puis utiliser un argument de dimension.

5 Une base vient naturellement à l'esprit si l'on tient compte des résultats des questions précédentes.

6 Raisonner par double implication. Pour la réciproque, appliquer un résultat de trigonalisation.

7 Raisonner comme à la question 4, puis penser au théorème du rang.

8 Considérer une base d'un supplémentaire de $\text{Ker}\,(u)$ dans E.

10 Mettre en œuvre un raisonnement similaire à celui de la question 8.

12 Considérer un vecteur propre de A, et exploiter le fait qu'il est aussi vecteur propre des puissances de A.

13 Procéder par analyse-synthèse.

14 Faire appel au résultat de la question 12.

16 Recourir à nouveau aux résultats des questions 12 et 15.

19 Pour la première partie de la question, trigonaliser la matrice A. Pour la seconde partie, prouver que $m \geqslant p$.

20 Montrer, à l'aide de considérations sur le rang et la trace de A, qu'elle admet 0 pour unique valeur propre.

21 Mettre en œuvre la démarche vue à la question 10.

22 Remarquer que $u$ et $\rho$ commutent.

23 Vérifier que $\text{R}'$ est la matrice de $\rho$ dans une base bien choisie. Déterminer la forme de $\text{R}'$, en faisant notamment appel aux résultats de la question 22. En déduire la forme de R.

24 Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente a nécessairement un indice de nilpotence inférieur ou égal à 3.

25 Reproduire le raisonnement de la question précédente.

26 On peut construire cette matrice à l'aide du résultat de la question 23, en utilisant les règles du calcul par blocs.

### II - Deuxième partie

28 Se rappeler que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

29 Montrer la liberté de la famille de la même manière qu'à la question 3.

30 Suivre d'abord l'indication donnée par l'énoncé. Considérer ensuite des antécédents par $u$ des vecteurs $x_1, \cdots, x_t$ et construire la base en s'appuyant sur ces antécédents.

31 Le résultat découle de celui de la question 29.

33 Étudier l'action de $\text{J}_\alpha$ sur la base canonique de $\mathbb{C}^\alpha$.

34 Exprimer l'indice de nilpotence de $N_\sigma$ en fonction de $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$.

35 Exprimer le rang de la matrice ${N_\sigma}^j$ en fonction de celui des blocs qui la composent.

36 En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $d_j$ est égal au cardinal de $\Lambda_j$.

39 Remarquer que le nombre de blocs et leurs tailles s'expriment uniquement en fonction du rang des puissances de $u$.

40 Utiliser les résultats des questions 32 et 39.

41 Commencer par calculer le nombre de blocs constituant $N_\sigma$ à l'aide du rang de A. Chercher ensuite une base adaptée, ou calculer les puissances de A.

42 Utiliser les résultats des questions 31 et 38.

43 Commencer par montrer que si $\lambda$ est valeur propre de M, alors $2\lambda$ l'est aussi.

45 Combien existe-t-il de partitions de $n$ dont le premier terme vaut exactement $n$ ?

46 Considérer un élément de $Y_{n,j}$ et distinguer des cas selon la valeur de son premier terme.

48 On peut soit écrire une fonction itérative utilisant un tableau, en s'inspirant de la question précédente, soit écrire une fonction récursive.

## I. Premiers résultats

**1** Soit $u$ un endomorphisme nilpotent d'indice 1. Alors sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ vérifie $\mathrm{M}^1 = 0$ soit $\mathrm{M} = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Un endomorphisme nilpotent d'indice 1 est nul.}}$$

**2** L'endomorphisme $u$ est nilpotent d'indice $p$. Celui-ci vérifie par définition $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } x \in \mathrm{E} \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$$

**3** Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Montrons par récurrence sur $q \in [\![ 0\,; p-1 ]\!]$ la proposition

$$\mathscr{P}(q) : \lambda_0 = \cdots = \lambda_q = 0$$

- Montrons que $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie. En appliquant $u^{p-1}$ de chaque côté de $(\mathbf{1})$, il vient

$$u^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x)\right) = u^{p-1}(0)$$

d'où par linéarité $$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{k+p-1}(x) = 0$$

Or pour tout $k \geqslant 1$, $k+p-1 \geqslant p$ donc $u^{k+p-1} = 0$, en particulier $u^{k+p-1}(x) = 0$. L'égalité précédente se réécrit alors $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$. Comme on a choisi $x$ de sorte que $u^{p-1}(x) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$.

- $\underline{\mathscr{P}(q) \Longrightarrow \mathscr{P}(q+1)}$ : Soit $q \in [\![ 0\,; p-2 ]\!]$ tel que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_q = 0$. Montrons que $\lambda_{q+1} = 0$. Par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=q+1}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

soit, après changement d'indice $k \leftarrow k-q-1$,

$$\sum_{k=0}^{p-q-2} \lambda_{k+q+1} u^{k+q+1}(x) = 0$$

En appliquant $u^{p-q-2}$ de chaque côté de cette égalité, on obtient comme précédemment par linéarité

$$\sum_{k=0}^{p-q-2} \lambda_{k+q+1} u^{k+p-1}(x) = 0$$

le seul terme non nul de la somme étant $\lambda_{q+1} u^{p-1}(x)$ puisque $u^{k+p-1} = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. Comme $u^{p-1}(x) \neq 0$, il s'ensuit $\lambda_{q+1} = 0$.

- $\underline{\text{Conclusion}}$ : Par récurrence, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (u^k(x))_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$$