Centrale Maths 2 PC 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alban Levy (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Vincent Lerouvillois (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet en trois parties explore certaines propriétés de la fonction

$$f : x \longmapsto (\sin x + 1)/\cos x$$

et des coefficients de son développement en série entière.

- Dans la première partie, on étudie la forme des dérivées de f puis son développement en série entière. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral, et quelques raisonnements par récurrence.
- La deuxième partie introduit la fonction ζ de Riemann, dont on étudie la continuité et la limite en l'infini. Grâce aux intégrales à paramètre

  $$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$$

  on obtient un développement en série entière de la fonction tangente qui fait intervenir cette fonction ζ.
- La dernière partie est plus originale : à coups de dénombrements, on étudie certaines permutations dites alternantes, les reliant finalement à la fonction f par des probabilités.

Ce sujet comporte quelques difficultés. Dans plusieurs questions, le résultat attendu n'est pas explicitement donné. Les dénombrements de la troisième partie sont assez délicats.

Indications

Partie I

1 Utiliser la règle de dérivation d'un quotient et l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour simplifier les calculs.

2 Construire la suite P_n par récurrence.

3 Démontrer la propriété par récurrence en utilisant l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n obtenue à la question précédente.

4 Développer $f^2(x) + 1$.

5 Appliquer la formule de Leibniz.

6 Utiliser la question 3 en remarquant qu'un entier naturel est positif par définition.

7 Utiliser le lemme d'Abel.

8 Calculer g^2 par produit de Cauchy.

9 Dériver $\mathrm{Arctan}\,(f)$ et $\mathrm{Arctan}\,(g)$.

10 Faire une preuve par l'absurde.

11 Prouver l'existence en donnant une décomposition explicite en fonction de $h(x)$ et $h(-x)$; l'unicité sera prouvée par l'absurde.

12 Décomposer la fonction f en somme de deux fonctions, l'une paire et l'autre impaire.

13 Faire le lien entre les coefficients de la série entière et les dérivées de la fonction.

15 Utiliser la formule de Leibniz puis évaluer en 0 en retirant les termes nuls.

Partie II

16 Montrer la convergence normale de la série de fonctions sur $[\,a\,;+\infty\,[$, $a > 1$.

17 Utiliser la monotonie de $t \mapsto 1/t^s$ pour faire une comparaison série intégrale.

18 Séparer la somme définissant ζ en la somme des termes pairs et celle des termes impairs.

19 Pour $x \in \mathbb{R}$, intégrer par parties la quantité $4x^2\mathrm{I}_n(x)$.

20 Calculer $\mathrm{I}_0(x)$ puis faire une preuve par récurrence.

21 Utiliser l'égalité $\sin(2\pi x) = 2\sin(\pi x)\cos(\pi x)$ et la question précédente.

22 Utiliser une comparaison série/intégrale de $(2t-1)^{-s}$ pour $t \in [\,k-1\,;k\,[$.

23 Utiliser la question 22 puis majorer par une série géométrique.

24 Réutiliser la question 22.

25 Dériver $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$ en vérifiant bien les hypothèses de dérivation d'une intégrale à paramètre ; utiliser la question 21.

26 Développer ζ dans la somme donnée, grâce à la question 18, puis en faire ressortir S_n.

27 Étudier la fonction $t \longmapsto \sin(t) - t\cos(t)$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

28 Utiliser l'inégalité de la question 27 avant d'intégrer par parties.

29 Faire tendre n vers l'infini dans le résultat de la question 26 en montrant que certains éléments tendent vers 0.

30 Utiliser l'unicité du développement en série entière de tan à partir des questions 12 et 29.

31 Utiliser la formule de Stirling et la question 17.

Partie III

32 Dresser la liste de toutes les permutations et identifier les éléments alternants montants.

33 Utiliser l'application $\phi : \sigma \mapsto (i \mapsto n+1-\sigma(i))$ et vérifier notamment qu'il s'agit d'une bijection de Ω_n dans lui-même.

34 Noter $\mathrm{A} = \{a_1 < \cdots < a_k\}$ et remarquer qu'une liste d'éléments deux à deux distincts peut se noter $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)})$ avec σ injective.

35 La question est difficile. Vérifier à l'aide d'arguments combinatoires que le nombre de permutations alternantes de $[\![1\,; n+1]\!]$ telles que $\sigma(k+1) = n+1$ est égal à

$$\binom{n}{k} \times \beta_k \times \beta_{n-k}$$

36 Réaliser que les suites $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ satisfont la même relation de récurrence.

37 Utiliser le fait que le rayon de convergence de la série $\sum \alpha_n x^n/n!$ est strictement supérieur à 1.

38 Utiliser des arguments similaires à ceux de la question 35 pour compter les permutations de $[\![1\,; n]\!]$ telles que $\sigma(1), \ldots, \sigma(i)$ est alternante montante.

39 Remarquer que pour tout k, $\mathrm{P}(\mathrm{M}_n = k) = \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > k-1) - \mathrm{P}(\mathrm{M}_n > k)$ et injecter cette égalité dans la somme définissant l'espérance.

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

1 En tant que quotient de fonctions indéfiniment dérivables et non nulles sur I, la fonction f l'est aussi. Calculons ses dérivées successives par les règles usuelles de dérivation. Soit $x \in \mathrm{I}$, alors

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - (\sin x + 1)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$$

en utilisant l'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Il vient de même

$$f''(x) = \frac{\cos^3 x - (\sin x + 1)(-2\sin x \cos x)}{\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x}$$

et $f^{(3)}(x) = \dfrac{(2\sin x \cos x + 2\cos x)\cos^3 x - (-3\cos^2 x\, \sin x)(\sin^2 x + 2\sin x + 1)}{\cos^6 x}$

Ainsi,
$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{I} \qquad f'(x) &= \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} \\ f''(x) &= \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 1}{\cos^3 x} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{\sin^3 x + 4\sin^2 x + 5\sin x + 2}{\cos^4 x} \end{aligned}}$$

2 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad \exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

est vraie pour tout n entier.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisqu'on a montré à la question 1 que pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\mathrm{P}_0(\sin x)}{(\cos x)^1}$$

avec $\mathrm{P}_0 = 1 + \mathrm{X} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: si l'on suppose que

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos x\, \mathrm{P}_n'(\sin x) \times (\cos x)^{n+1} + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)(\cos x)^n \sin x}{(\cos x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\mathrm{P}_n'(\sin x) \times (\cos x)^2 + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)\sin x}{(\cos x)^{n+2}} \\ f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{P}_n'(\sin x) \times (1 - \sin^2 x) + \mathrm{P}_n(\sin x)(n+1)\sin x}{(\cos x)^{n+2}} \end{aligned}$$

car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On obtient donc $\mathscr{P}(n+1)$ en posant

$$\boxed{\mathrm{P}_{n+1} = (1 - \mathrm{X}^2) \cdot \mathrm{P}_n' + (n+1)\mathrm{P}_n \cdot \mathrm{X}}$$