X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2019
Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université) et Jérôme Didier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Étienne Martel (ENS Paris-Saclay), Nicolas Courrier (professeur en CPGE), Stéphane Ravier (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce sujet est divisé en deux parties indépendantes. La première traite des lois de la friction.

- Dans un premier temps, on introduit les conditions de l'équilibre d'un solide le long d'un plan incliné à l'aide d'un modèle à deux points de contact. L'état d'adhérence de ces deux points est décrit à l'aide d'un diagramme d'état qui permet de déterminer si l'un des deux points, ou le solide, doit glisser ou non.
- La deuxième sous-partie fait appel à cette description pour décrire le phénomène de reptation thermique d'un solide soumis à des cycles de hausse et de baisse de la température. Cette étude, d'abord qualitative, modélise ensuite, à l'aide de ressorts, la charge accumulée au niveau des contacts.
- La troisième sous-partie est consacrée à la modélisation des lois d'Amontons-Coulomb à l'échelle microscopique. Elle fait intervenir la géométrie des contacts à cette échelle ainsi que la résistance des matériaux.

Cette partie nécessite une bonne compréhension du point particulier du programme de MP que constituent les lois du frottement solide. L'ensemble est d'un bon niveau et aborde plusieurs pistes très intéressantes pour décrire les conséquences et l'origine microscopique des lois phénoménologiques d'Amontons-Coulomb.

La seconde partie porte sur l'étude de l'interaction entre le pantographe d'un train et le système caténaire.

- La première sous-partie propose d'étudier la déformation du câble sous l'effet de son propre poids.
- La deuxième sous-partie se focalise sur le comportement dynamique du pantographe, notamment le comportement du contact entre le caténaire et le fil ainsi que l'influence de l'amortissement sur le décollement de ce dernier.
- La dernière sous-partie propose une modélisation du premier mode propre du pantographe, à travers l'étude de deux situations décrites dans le sujet.

Cette partie est longue et assez ardue, les questions II.7 et II.15 notamment sont très difficiles et bloquantes sur les quelques questions qui les suivent, tandis que les toutes dernières sont assez faciles et ne présentent pas grand intérêt. Ces passages difficiles sont d'une importance limitée pour les révisions, à l'inverse des autres questions, mais ils restent utiles pour la culture scientifique et pour comprendre cette thématique qui tombe souvent ces dernières années (deux sujets déjà l'an dernier en PSI).

Indications

Partie I

I.6 Existe-t-il un unique couple d'états d'adhérence vérifiant les équations du mouvement ?

I.7 Quels doivent être les états d'adhérence des deux contacts pour qu'il y ait glissement ?

I.10 Les paramètres donnés par l'énoncé aux questions I.4 et I.5 ($q = 1/4$, $f = 1$ et $\tan\theta = 1/2$) ne permettent pas de résoudre cette question. Pourquoi ?

I.11 Les ressorts sont orientés selon $\overrightarrow{u_x}$ et transmettent la force appliquée par (1) sur les patins (1A) et (1B) selon ce vecteur. Il faut imaginer un élément parfaitement glissant associé à chaque couple de ressorts permettant de transmettre la composante des forces exercées par (1) sur les deux patins selon $\overrightarrow{u_z}$.

I.14 Quelle amplitude thermique permet de passer d'une situation de glissement en A à une situation de glissement en B ?

I.16 L'angle θ est choisi proche de l'angle de glissement de telle manière qu'une variation infinitésimale de T suffise à passer dans un état de glissement pour l'un des deux contacts.

I.19 Comment varie $\mathrm{R_G}$ lorsque F augmente ? Quelle doit être sa valeur au seuil de glissement ?

I.20 En l'absence de frottements, y a-t-il besoin d'appliquer une force F pour que le solide « descende » le long d'une dent ?

I.24 Raisonner sur l'énergie d'adhésion en ne prenant en compte que les atomes de l'interface.

Partie II

II.2 Cette question et la suivante utilisent les mêmes méthodes que pour la corde de Melde.

II.4 Attention à l'orientation de l'angle.

II.5 Il faut sommer les déflexions successives sur un demi-câble pour atteindre le point le plus bas et reconnaître pour cela des suites arithmétiques.

II.7 Cette question est difficile car il faut trouver la relation $\ell_{\mathrm{eq}} = z + h + \ell$ qui aurait mérité une question à elle seule. On peut l'admettre pour avancer et essayer de la démontrer dans un second temps.

II.9 Distinguer deux cas selon la valeur de Q par rapport à 1.

II.10 Il faut réutiliser des résultats démontrés à la question II.8.

II.15 Cette question est très difficile. Il faut tout d'abord paramétrer le système car l'énoncé ne le fait pas, puis traduire les différents équilibres des points A et D, le second étant sans masse. On peut alors appliquer le principe fondamental au point A et procéder de la même façon qu'à la question II.7.

II.19 Il faut refaire un bilan comme ceux déjà établis dans les questions II.7 et II.15, en étudiant les points A et B.

I. Étude du phénomène de reptation thermique

I.1 Faisons un bilan des forces appliquées sur le solide parallélépipédique dans le référentiel, supposé galiléen, du plan incliné. On suppose que le solide (1) et la surface de (0) sont suffisamment réguliers pour que la résultante des forces de contact le long des arêtes passe par les points A et B situés au milieu de ces arêtes. Il en résulte que les forces appliquées sur le solide sont :

- la réaction du plan en A : $\overrightarrow{\mathrm{R_A}} = \mathrm{T_A}\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{N_A}\,\overrightarrow{u_z}$;
- la réaction du plan en B : $\overrightarrow{\mathrm{R_B}} = \mathrm{T_B}\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{N_B}\,\overrightarrow{u_z}$;
- le poids du solide $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\,\overrightarrow{g}$ appliqué en son centre de masse G.

Le principe fondamental de la statique (PFS) appliqué au solide (1) donne

$$\overrightarrow{\mathrm{R_A}} + \overrightarrow{\mathrm{R_B}} + \overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{0}$$

Soit, en projetant sur les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$,

$$\begin{cases} \mathrm{T_A} + \mathrm{T_B} - mg\sin\theta = 0 & \text{sur } \overrightarrow{u_x} \\ \mathrm{N_A} + \mathrm{N_B} - mg\cos\theta = 0 & \text{sur } \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Complétons le jeu d'équations décrivant le solide à l'équilibre en considérant le théorème du moment cinétique appliqué en A, point immobile dans le référentiel du plan incliné. En tenant compte des points d'application des forces, il vient

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{R_B}} + \overrightarrow{\mathrm{AA}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{R_A}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{0}$$

d'où l'on tire, en remplaçant chaque vecteur par ses composantes,

$$(2b\,\overrightarrow{u_x}) \wedge (\mathrm{T_B}\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{N_B}\,\overrightarrow{u_z}) + (b\,\overrightarrow{u_x} + a\,\overrightarrow{u_z}) \wedge (-mg\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} - mg\,\cos\theta\,\overrightarrow{u_z}) = \overrightarrow{0}$$

En projection sur $\overrightarrow{u_y}$, $\quad -2b\,\mathrm{N_B} + mg(b\,\cos\theta - a\,\sin\theta) = 0$

Donc, avec $q = \dfrac{a}{b}$, $\qquad \boxed{\mathrm{N_B} = \dfrac{mg}{2}\,(\cos\theta - q\,\sin\theta)}$

Injectons ce résultat dans les expressions du PFS précédentes pour obtenir

$$\boxed{\mathrm{N_A} = \frac{mg}{2}\,(\cos\theta + q\,\sin\theta) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T_A} + \mathrm{T_B} = mg\,\sin\theta}$$

I.2 Le solide est à l'équilibre s'il ne glisse pas et s'il ne bascule pas. Examinons d'abord la première condition. Le solide (1) ne glisse pas si au moins l'un des deux contacts A ou B ne glisse pas. Choisissons A pour le contact non glissant. D'après les lois de Coulomb, $\mathrm{T_A} < f\,\mathrm{N_A}$ tandis que $\mathrm{T_B} = f\,\mathrm{N_B}$ pour le contact B, puisque celui-ci est glissant. Sommons ces deux relations pour obtenir

$$\mathrm{T_A} + \mathrm{T_B} < f\,(\mathrm{N_A} + \mathrm{N_B})$$

Choisir B comme le contact non glissant conduit au même résultat. Remplaçons les sommes des réactions tangentielles et normales par leurs expressions obtenues à la question précédente :

$$mg\,\sin\theta < f\,mg\,\cos\theta$$

soit $\qquad \boxed{\tan\theta < f}$

> On trouve le même résultat que pour un solide à un seul point de contact avec le support.

Le solide ne bascule pas tant que le contact en B n'est pas rompu, c'est-à-dire tant que $\mathrm{N_B} > 0$. Ceci implique, d'après la question précédente, que

$$\frac{mg}{2}(\cos\theta - q\,\sin\theta) > 0$$

soit

$$\boxed{\tan\theta < \frac{1}{q}}$$

L'énoncé pose que $f < 1/q$. Il en résulte que **la condition de non-glissement est rompue la première lorsque $\boldsymbol{\theta}$ augmente** et que le basculement du solide ne se produit jamais.

I.3 D'après la question I.1, $\mathrm{T_A} + \mathrm{T_B} = mg\,\sin\theta$

soit

$$\mathrm{N_A}\,\frac{\mathrm{T_A}}{\mathrm{N_A}} + \mathrm{N_B}\,\frac{\mathrm{T_B}}{\mathrm{N_B}} = \mathrm{N_A\,Z_A} + \mathrm{N_B\,Z_B} = mg\,\sin\theta$$

Substituons à $\mathrm{N_A}$ et $\mathrm{N_B}$ leurs expressions établies à la question I.1 :

$$\frac{mg}{2}\,(\cos\theta + q\,\sin\theta)\,\mathrm{Z_A} + \frac{mg}{2}\,(\cos\theta - q\,\sin\theta)\,\mathrm{Z_B} = mg\,\sin\theta$$

Factorisons cette expression par $(mg/2)\cos\theta$ pour obtenir

$$\boxed{\mathrm{A}(q,\theta)\,\mathrm{Z_A} + \mathrm{B}(q,\theta)\,\mathrm{Z_B} = \mathrm{C}}$$

avec

$$\boxed{\mathrm{A}(q,\theta) = 1 + q\,\tan\theta \qquad \mathrm{B}(q,\theta) = 1 - q\,\tan\theta \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} = 2\,\tan\theta}$$

D'après la question précédente, $\tan\theta < 1/q$, donc $\mathbf{A > 0}$ et $\mathbf{B > 0}$.

I.4 À q et $\tan\theta$ fixés, l'équation obtenue à la question précédente est celle d'une droite $\mathcal{D}$ dans le plan $\mathcal{P}(\mathrm{O}, \mathrm{Z_A}, \mathrm{Z_B})$:

$$\mathrm{Z_B} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\,\mathrm{Z_A} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$$

Pour $\tan\theta = 1/2$ et $q = 1/4$, on a $\mathrm{A} = 9/8$, $\mathrm{B} = 7/8$ et $\mathrm{C} = 1$. La droite $\mathcal{D}$ est représentée ci-dessous.