

## Centrale Physique et Chimie 2 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) et Alexandre Herault (professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (professeur en CPGE), Louis Salkin (professeur en CPGE) et Augustin Long (professeur en CPGE).

---

Ce sujet composé de deux parties indépendantes porte sur la capture d'empreintes digitales et le stockage de déchets radioactifs.

- La première partie est composée de trois sous-parties relativement indépendantes. Dans un premier temps, on étudie le système de détection de l'empreinte dans le cadre de l'optique géométrique. Ensuite, on caractérise le phénomène de réflexion totale à partir des lois de l'électromagnétisme. Une analogie quantique avec l'effet tunnel permet enfin d'exprimer les conditions d'apparition du phénomène de réflexion totale frustrée.
- La seconde partie étudie la radioactivité  $\alpha$ . À partir d'une approche quantique, on exprime la durée de demi-vie de l'élément radioactif considéré. On s'intéresse ensuite aux aspects thermiques liés au stockage des déchets. La dernière sous-partie de ce problème traite de l'emprisonnement des produits de fission dans du verre en fusion. Ce verre est ensuite coulé dans les fûts de stockage. Les espèces à piéger, souvent des cations métalliques, sont actives du point de vue rédox et interagissent avec l'oxygène en fonction du potentiel du verre fondu. Cette partie de chimie étudie essentiellement le couple  $O_2/O^{2-}$  dans le but d'éviter la formation de bulles qui feraient mousser le verre en fusion. Ce couple est très présent dans le verre ; les ions oxyde en sont un constituant essentiel et le dioxygène provient de l'atmosphère présente au-dessus du verre en fusion. Les questions utilisent presque uniquement la relation de Nernst.

Cette épreuve de longueur raisonnable alterne questions proches du cours et raisonnements plus difficiles. Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 On peut utiliser l'approximation des petits angles dans les conditions de Gauss.
- 6 La distance entre les images de chaque crête est  $|\gamma|a$ .
- 7 Pour  $\gamma = -2$ , si  $e \ll |p|$ ,  $e' \ll p'$ .
- 8 Calculer le demi-angle au sommet du triangle formé par  $M_2$  et la lentille puis vérifier si l'approximation des petits angles est valide.
- 11 Le doigt ne peut pas être éclairé s'il y a réflexion totale sur la face du prisme.
- 15 La relation de la question 14 est valable peu importe la valeur de  $x$ .
- 17 Exprimer les champs magnétiques incident, réfléchi et transmis.
- 19 Déterminer les signes possibles de  $k_{tz}^2$ .
- 22 Il ne peut pas y avoir d'onde qui se propage vers les  $x$  décroissants pour  $x \geq 0$ .
- 27 Faire l'analogie entre l'expression de  $\kappa$  et le résultat de la question 19.

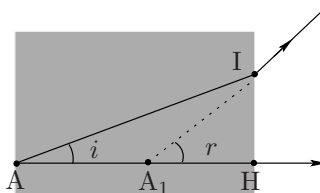
### Partie II

- 30 La particule  $\alpha$  fait un aller-retour de longueur  $2R$  dans le puits pendant une durée  $\tau = 1/f$ .
- 38 Calculer  $T(R)$  en utilisant la continuité du flux en  $r = R$ .
- 41 L'équilibre implique l'unicité des potentiels pour tous les couples.
- 42 Utiliser la relation de la question 41 pour remplacer la différence des potentiels standard par un terme dépendant de  $f_{O_2}^*$  et  $a(O^{2-})$ .

## I. CAPTURE D'EMPREINTES DIGITALES PAR RÉFLEXION TOTALE FRUSTRÉE

**1** D'après la figure ci-contre,

$$\tan i = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} \quad \text{et} \quad \tan r = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA_1}}$$



Dans les conditions de Gauss, on peut utiliser l'approximation des petits angles :  $\tan i \simeq \sin i$  et  $\tan r \simeq \sin r$ . Or, la relation de Snell-Descartes s'écrit

$$n \sin i = \sin r$$

c'est-à-dire  $n \tan i \simeq \tan r$ . Avec les relations trigonométriques précédentes,

$$\boxed{\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}}$$

**2** On a  $p = \overline{OA_1}$  et  $p' = \overline{OA'_1}$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} D_1 &= \overline{A_1A'_1} \\ &= \overline{A_1O} + \overline{OA'_1} \\ D_1 &= -p + p' \end{aligned}$$

Avec la formule du grandissement  $p' = \gamma p$ ,

$$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}}$$

Utilisons la formule de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma D_1} - \frac{\gamma - 1}{D_1}$$

d'où

$$\boxed{f' = \frac{\gamma D_1}{-\gamma^2 + 2\gamma - 1}}$$

**3** Pour un objet réel,  $p < 0$  et pour une image réelle  $p' > 0$ . L'image est alors renversée sur l'écran :

$$\boxed{\gamma < 0}$$

On a 
$$\frac{D_1}{f'} = -\gamma - \frac{1}{\gamma} + 2$$

Notons  $g(\gamma)$  cette fonction. Sa dérivée vaut

$$g'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$$

Par conséquent,  $g'(\gamma) < 0$  si  $\gamma < -1$  et  $g'(\gamma) > 0$  si  $\gamma > -1$ .

Le rapport  $D_1/f'$  est donc borné inférieurement.

Le minimum est atteint pour  $\gamma = -1$ . En ce point,  $D_1/f' = 4$ , d'où

$$\boxed{f' \leq \frac{D_1}{4}}$$

**4** D'après les questions 2 et 3, pour  $\gamma = -2$ ,  $p' = 2D_1/3$ . Il vient

$$p' = 3f' \quad \text{et} \quad f' = \frac{2}{9} D_1$$

Déterminons la valeur numérique de  $D_1$ . La relation de Chasles permet d'écrire

$$\begin{aligned} D &= \overline{AA_1'} \\ &= \overline{AA_1} + D_1 \\ &= \overline{AH} + \overline{HA_1} + D_1 \\ &= L + \frac{1}{n} \overline{HA} + D_1 \quad (\text{d'après la question 1}) \\ D &= L - \frac{1}{n} L + D_1 \end{aligned}$$

d'où 
$$D_1 = D - L \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = 9 \text{ cm}$$

Par conséquent, 
$$\boxed{p' = 6 \text{ cm} \quad \text{et} \quad f' = 2 \text{ cm}}$$

**5** Reprenons l'expression de  $f'$  obtenue à la question 2 et développons-la :

$$\gamma^2 - \left( 2 - \frac{D_1}{f'} \right) \gamma + 1 = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant  $\Delta$  vaut

$$\Delta = \frac{D_1}{f'} \left( \frac{D_1}{f'} - 4 \right) \geq 0$$

Les deux solutions sont 
$$\gamma_{\pm} = 1 - \frac{D_1}{2f'} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

D'après ces expressions, on ne garde que  $\gamma_-$  car  $|\gamma_+| < 1$ , ce qui n'est pas attendu.

On doit diminuer  $f'$  pour augmenter  $|\gamma|$ .

En diminuant trop la valeur de la distance focale  $f'$ , on augmente les aberrations géométriques.

**6** Pour distinguer deux crêtes successives sur le capteur CCD, les positions des images de chaque crête doivent se situer sur deux pixels différents. À travers la lentille, la distance entre les deux images est  $|\gamma| a$ . Il faut alors vérifier

$$\boxed{|\gamma| a > \ell_c}$$

On doit donc prendre un pixel de largeur  $\ell_c$  telle que

$$\boxed{\ell_c < 200 \text{ } \mu\text{m}}$$

**7** Appliquons la relation de conjugaison de Descartes au couple  $(M_2, M_2')$  :

$$\frac{1}{p' - e'} - \frac{1}{p - e} = \frac{1}{f'}$$

D'après la valeur numérique de  $\gamma$ , on peut supposer que si  $e \ll |p|$ ,  $e' \ll p'$ . Développons alors la relation précédente à l'ordre le plus bas non nul en  $e/p$  et  $e'/p'$  :

$$\frac{1}{p'} \left( 1 + \frac{e'}{p'} \right) - \frac{1}{p} \left( 1 + \frac{e}{p} \right) \simeq \frac{1}{f'}$$