Centrale Maths 1 MP 2019 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Corentin Fierobe (ENS Lyon) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet d'algèbre linéaire propose d'étudier une certaine classe d'endomorphismes, les *endomorphismes cycliques*, ainsi que leurs équivalents matriciels, les très classiques *matrices compagnons*. Les questions autour de ces objets visent notamment à redémontrer certains résultats puissants, comme le théorème de Cayley-Hamilton ou la décomposition de Frobenius d'un espace vectoriel associée à un endomorphisme. Elles nécessitent des connaissances solides en algèbre linéaire, notamment sur la réduction et sur les polynômes d'endomorphismes.

- La partie I analyse les liens entre endomorphismes cycliques et matrices compagnons, présentant au passage des propriétés sur leurs polynômes minimaux et caractéristiques. Elle fait redémontrer le théorème de Cayley-Hamilton en utilisant ces objets.
- La partie II complète les résultats de la partie I afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme quelconque soit cyclique : lorsque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est cyclique si et seulement si la famille $(\mathrm{Id}\,, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre, où n est la dimension de l'espace E.
- La partie III propose une démonstration du théorème de décomposition de Frobenius d'un espace associée à un endomorphisme : *pour un endomorphisme noté f, il existe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_r$ de E stables par f, tels que*
  - $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_r$ *;*
  - *f induit sur chaque E_i un endomorphisme cyclique ;*
  - *le polynôme minimal de f sur E_{i+1} divise celui de f sur E_i.*

  On s'en sert pour montrer des propriétés sur le commutant d'un endomorphisme en lien avec le caractère cyclique de celui-ci.
- La partie IV étudie les endomorphismes orthocycliques, un cas particulier d'endomorphisme cyclique sur un espace euclidien.

La principale difficulté de ce sujet réside dans sa longueur. De nombreuses questions sont très classiques et devaient être résolues rapidement afin de se concentrer sur les quelques questions plus délicates.

Indications

Partie I

1 Comparer χ_{M} et $\chi_{{}^t\mathrm{M}}$.

3 On pourra faire une opération élémentaire judicieuse sur la première ligne, ou développer par rapport à la dernière colonne.

4 Pour un vecteur X, calculer ${}^t\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}\,\mathrm{X}$. Si, de plus, X est un vecteur propre de ${}^t\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}$ pour la valeur propre λ, montrer qu'il est lié au vecteur $(\lambda^i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$.

5 Pour le sens direct, décomposer $f(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

6 Si f est diagonalisable, considérer la décomposition en sous-espaces propres de la matrice ${}^t\mathrm{C}_{\mathrm{Q}}$, où C_{Q} est une matrice compagnon représentant f.

7 Remarquer que si Q est un polynôme de degré d tel que $\mathrm{Q}(f) = 0$, alors la famille $(\mathrm{Id}\,, f, \ldots, f^{d-1})$ est liée.

8 Considérer le plus grand entier p tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre, en justifiant son existence.

10 Utiliser les résultats des questions 8, 9 et 3.

11 Montrer que $\chi_f(f)(x) = 0$ pour tout vecteur x non nul de E.

Partie II

12 Montrer que si x_0 est tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, alors la famille $(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

13 Utiliser le lemme des noyaux.

16 On pourra utiliser la question 12 pour montrer que $\nu_k \leqslant m_k$ pour tout k. Raisonner ensuite par l'absurde en supposant qu'il existe un k tel que $\nu_k < m_k$ pour trouver un polynôme non nul de degré $< n$ qui annule f.

17 Prouver que $\nu_k = \dim \mathrm{F}_k$ pour tout k.

18 Utiliser le fait que $u_1 \in \mathrm{F}_1, \ldots, u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1} \in \mathrm{F}_p$, que $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$ sont stables par f, et la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$.

Partie III

22 On pourra montrer que $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.

24 Vérifier que, sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe un vecteur $x_1 \in \mathrm{F}_1 \smallsetminus \cup_{j\neq 1}\mathrm{F}_j$, et un vecteur $x_2 \in \mathrm{F}_2 \smallsetminus \cup_{j\neq 2}\mathrm{F}_j$, puis considérer les vecteurs $x_1 + tx_2$ pour $t \in \mathbb{R}$.

25 Vérifier que $\cup_{x\in\mathrm{E}\smallsetminus\{0\}} \operatorname{Ker} \pi_{f,x} = \mathrm{E}$ et que cette réunion est en fait finie.

29 Pour $x \in \mathrm{E}_1$, relier $\Psi(x)$ aux coordonnées de x dans une base de E_1 à déterminer.

30 Montrer que $\mathrm{F} = \operatorname{Ker} \Psi$ et appliquer le théorème du rang.

31 Envisager une récurrence sur la dimension de E.

32 Utiliser le résultat de la question 31 pour exhiber une famille libre de cardinal n d'endomorphismes qui commutent avec f.

33 Étudier la dimension de ces deux espaces.

Partie IV

34 Utiliser le théorème de réduction des isométries.

35 Si $\mathrm{C_Q}$ est une matrice compagnon représentant f dans une base orthonormale, ses colonnes sont orthonormées pour le produit scalaire canonique.

36 Pour cette question classique, on pourra d'abord montrer que f se triangularise dans une certaine base, puis utiliser Gram-Schmidt.

37 Pour le sens indirect, on pourra essayer d'adapter la base trouvée à la question 36, afin de transformer la matrice triangulaire correspondante en une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

1 On constate que par symétrie de XI_n et linéarité de la transposée

$$\mathrm{XI}_n - {}^t\mathrm{M} = {}^t(\,\mathrm{XI}_n) - {}^t\mathrm{M} = {}^t(\,\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$$

Ainsi, $$\chi_{\,{}^t\mathrm{M}} = \det {}^t(\,\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$$

Comme le déterminant d'une matrice est le même que celui de sa transposée

$$\chi_{\,{}^t\mathrm{M}} = \det {}^t(\,\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M}) = \chi_\mathrm{M}$$

En particulier les polynômes $\chi_{\,{}^t\mathrm{M}}$ et χ_M ont les mêmes racines. Or les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique. Ainsi,

$$\boxed{\text{Les matrices M et } {}^t\mathrm{M} \text{ ont le même spectre.}}$$

2 Prouvons d'abord que pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, ${}^t\mathrm{A}$ est aussi diagonalisable. Il suffira alors d'appliquer le résultat à $\mathrm{A} = \mathrm{M}$, puis à $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{M}$ en utilisant le fait que ${}^t(\,{}^t\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, pour obtenir l'équivalence voulue.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{DP}$. En transposant cette égalité, on obtient

$${}^t\mathrm{A} = {}^t(\,\mathrm{P}^{-1}\mathrm{DP}) = {}^t\mathrm{P}\,{}^t\mathrm{D}\,{}^t(\,\mathrm{P}^{-1})$$

Or la matrice $\mathrm{Q} = {}^t(\,\mathrm{P}^{-1})$ est inversible, d'inverse $\mathrm{Q}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$. Puisque D est diagonale, ${}^t\mathrm{D} = \mathrm{D}$ et ainsi

$${}^t\mathrm{A} = \mathrm{Q}^{-1}\,{}^t\mathrm{D}\,\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{DQ}$$

Ceci permet de conclure que ${}^t\mathrm{A}$ est diagonalisable. Compte tenu de la remarque initiale,

$$\boxed{\text{La matrice } {}^t\mathrm{M} \text{ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.}}$$

3 On peut écrire

$$\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{C_Q}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On effectue alors l'opération suivante sur la première ligne

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{XL}_2 + \mathrm{X}^2\mathrm{L}_3 + \ldots + \mathrm{X}^{n-1}\mathrm{L}_n$$

de sorte que le déterminant devient

$$\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{C_Q}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{Q(X)} \\ -1 & \mathrm{X} & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \mathrm{X} & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \mathrm{X} + a_{n-1} \end{vmatrix}$$