X/ENS Physique PSI 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Le sujet porte sur le transport de l'énergie électrique par voie filaire, ainsi que sur des problématiques qui s'y rattachent.

- Dans une première partie, c'est le rendement énergétique du réseau qui est étudié. On s'attache d'abord à évaluer la puissance perdue en ligne et quelques paramètres de performance qui lui sont associés, principalement le rendement. C'est ce dernier que l'on cherche à optimiser au fil des questions. À cette fin, le sujet propose des mécanismes de compensation de pertes à travers des systèmes utilisant des composants passifs ou des interrupteurs commandés. Les domaines du cours abordés sont précis et tournent tous autour de la conversion de puissance et du transfert d'énergie.
- La seconde partie s'intéresse aux défauts dans les lignes, en développant une analogie avec la corde vibrante. Les questions abordent quasi exclusivement le cours, que ce soit l'établissement de l'équation de propagation ou les calculs de l'impédance caractéristique.

Le problème est assez long et propose des thématiques variées, autour de l'électrocinétique et de la physique des ondes. Ce sujet constitue une très bonne synthèse sur ces chapitres et l'occasion d'un entraînement approfondi.

Indications

10 Écrire la loi des nœuds pour l'intensité $i(t)$ traversant l'installation et utiliser la notation complexe.

11 Un condensateur en parallèle de l'installation est une bonne solution, mais il faut déterminer sa capacité en utilisant les complexes une fois encore.

15 Question très difficile : démontrer d'abord que la relation

$$\mathrm{I}_0 \sin(\varphi) + \mathrm{I}_\mathrm{C} \sin(\varphi_\mathrm{M}) = 0$$

permet d'optimiser le rendement. Utiliser alors la géométrie pour conclure à partir du dessin de l'énoncé.

18 La qualité du lissage dépend des ordres de grandeur respectifs des impédances de la bobine et de la résistance.

22 Question difficile : il faut étudier tous les couples d'interrupteurs pouvant être fermés simultanément et regarder ce que cela entraîne pour la tension $u_1(t)$ et l'intensité $i(t)$.

24 On est censé trouver une allure de tension lissée : est-ce le cas ?

26 Deux composants particuliers permettent d'étudier les grandeurs demandées.

33 Cette question nécessite d'utiliser les relations des questions précédentes.

35 Le sujet comporte une coquille évidente, prendre les définitions des puissances du début de l'énoncé.

38 Utiliser, une nouvelle fois, la notation complexe.

41 Traduire la fixation de la corde en zéro pour la somme des ondes incidente et réfléchie.

42 Écrire le théorème de la puissance cinétique puis dériver les différents termes, dont certains vont se simplifier grâce à l'équation de d'Alembert.

44 Il y a une erreur d'énoncé sur le signe de l'expression demandée.

48 L'onde est progressive s'il n'y a pas d'onde réfléchie. Cette situation conduit à une condition faisant intervenir $\underline{\mathrm{Z}}_\mathrm{C}$ et $\underline{\mathrm{Z}}_\mathrm{D}$.

49 Évaluer les grandeurs demandées grâce aux formules fournies aux différents points d'intérêt et combiner les relations obtenues.

Problèmes liés à la distribution filaire de l'énergie électrique

1 La situation pour laquelle l'intensité est la même en tout point de la ligne et à tout instant correspond au fait que l'on néglige la propagation dans le fil. C'est donc dans le cadre de **l'approximation des régimes quasi stationnaires** (ou quasi permanents) que cette condition est vérifiée. Ici, il faut que le temps de propagation le long de la ligne soit négligeable devant le temps typique de variation des phénomènes électriques. Autrement dit, que la longueur typique D parcourue par les courants soit faible devant la longueur d'onde $\lambda = c/f$; ce qui se formule finalement en

$$\boxed{\mathrm{D} \ll \frac{c}{f}}$$

> La question 6 permet de quantifier cette relation.

2 La différence entre les deux tensions proposées correspond à la chute de tension dans la ligne, plus précisément $\mathrm{R}i_{\mathrm{S}}(t)$, où R est la résistance de la ligne. On peut donc considérer que les **tensions sont égales dès lors que $\boldsymbol{\mathrm{R}i_{\mathrm{S}}{}^2 \ll u_{\mathrm{S}}}$**.

3 La perte en ligne est précisément due à la résistance de ligne, qui dissipe la puissance sous forme de chaleur à travers **l'effet Joule**, et, de façon beaucoup plus marginale, à des **pertes par rayonnement.**

4 L'intensité utilisée dans la formule proposée est **l'intensité efficace** du courant parcourant la ligne.

> Toutes les questions précédentes sont des questions de début de sujet et auraient pu être réunies en une seule et même question.

5 Dans le cas d'un conducteur ohmique cylindrique de longueur d, de section S et de résistivité ρ, la résistance vaut $\mathrm{R} = \rho d/\mathrm{S}$ et conduit à une puissance Joule dissipée $\mathrm{P_J} = \rho d/\mathrm{S}\mathrm{I}^2$. Par rapport à la forme proposée, le coefficient K s'identifie alors au rapport ρ/S, ainsi les pertes sont favorisées par l'utilisation d'un conducteur à grande résistivité (c'est logique) et des fils de petites sections. C'est d'ailleurs pour cela que les fils de câbles à hautes tensions sont souvent épais.

6 L'intensité est sinusoïdale **à la condition que l'installation soit linéaire** et que celle-ci soit bien entendu alimentée par un réseau de fréquence f correspondant à la fréquence désirée. En Europe, le réseau est alimenté en 50 Hz pour une tension efficace de 230 V (soit environ 320 V en tension maximale, c'est-à-dire la tension efficace multipliée par $\sqrt{2}$).

> La valeur de la tension efficace traditionnellement apprise est plutôt 220 V et elle a sans doute été comptée comme correcte, mais elle a en réalité été abrogée en 1986 ! Le réseau est passé progressivement de 220 à 230 V depuis.

On peut désormais exprimer quantitativement la condition de la question 1, si l'on prend comme ordre de grandeur de la vitesse de propagation celle de la lumière,

$$\boxed{\mathrm{D} \ll \frac{c}{f} \qquad \text{soit numériquement} \qquad \mathrm{D} \ll 6 \cdot 10^3\ \mathrm{km}}$$

C'est une valeur acceptable entre des relais haute tension éloignés de quelques dizaines de kilomètres, mais plus discutable pour des lignes très hautes tensions de plusieurs centaines de kilomètres.

7 L'énoncé donne la définition du rendement et de la puissance perdue dans la ligne

$$\eta = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}+\mathrm{P_L}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P_L} = \mathrm{K}\,d\,{\mathrm{I}_0}^2$$

Par conséquent, il reste à calculer la puissance consommée par l'installation, soit

$$\mathrm{P} = \langle u_\mathrm{D}(t) i_\mathrm{D}(t)\rangle = \mathrm{U_0 I_0}\cos(\varphi)$$

Finalement,

$$\boxed{\eta = \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{K}\,d\,\mathrm{P}}{{\mathrm{U}_0}^2\cos^2(\varphi)}}}$$

8 Le seul autre facteur sur lequel on peut jouer pour augmenter le rendement est la tension U_0, qu'il faut avoir la plus grande possible. Pour cela, on réalise en pratique une élévation de tension grâce à un transformateur avant « le départ en ligne », ce qui conduit à des lignes dites **lignes à hautes tensions**, puis l'on utilise un second transformateur abaisseur afin de revenir à des tensions de l'ordre de 230 V.

> Sur le réseau français, ces lignes sont de l'ordre de 400 kV pour le réseau THT (Très Hautes Tensions) et 220 kV pour le réseau HT (Hautes Tensions).

9 La puissance consommée par le dispositif de compensation vaut

$$\mathrm{P_C} = \langle u_\mathrm{D}(t) i_\mathrm{C}(t)\rangle = \mathrm{U_0 I_C}\cos(\varphi_\mathrm{C})$$

Celle-ci est donc nulle lorsque l'intensité et la tension sont **en quadrature** de phase.

$$\boxed{\text{La puissance moyenne } \mathrm{P_C} \text{ est nulle pour } \varphi_\mathrm{C} = \pm\frac{\pi}{2}.}$$

10 La puissance nulle impose la valeur de φ_C au signe près. Si l'on regarde l'expression du rendement établie à la question 7, le seul paramètre permettant de régler ce dernier est la valeur de l'intensité efficace, qu'il faut tenter de minimiser. Or, une fois le branchement effectué, l'installation est alimentée par un courant de la forme de $i(t)$ et le dispositif de compensation par $i_\mathrm{C}(t)$, soit un courant de ligne total

$$i_\mathrm{D}(t) = i(t) + i_\mathrm{C}(t) = \mathrm{I}_0\sqrt{2}\,\cos(2\pi f t+\varphi) + \mathrm{I_C}\sqrt{2}\,\cos\left(2\pi f t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

En notation complexe et avec les valeurs efficaces, on a

$$\underline{i}_\mathrm{D} = \mathrm{I}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \pm \mathrm{j}\,\mathrm{I_C} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{I_D} = \sqrt{(\mathrm{I}_0\cos(\varphi))^2 + (\mathrm{I}_0\sin(\varphi)\pm\mathrm{I_C})^2}$$

L'énoncé précise que φ est négatif mais plus grand que $-\pi/2$, par conséquent le sinus est négatif. Ainsi, pour maximiser le rendement et puisque $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha-\pi/2) = +\sin(\alpha)$, il faut choisir

$$\mathrm{I_C} = -\mathrm{I}_0\sin(\varphi) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i_\mathrm{C}(t) = \pm\,\mathrm{I}_0\sqrt{2}\sin(\varphi)\,\sin(2\pi f t)}$$

11 Pour réaliser la condition précédente, on peut envisager d'utiliser **un condensateur** de capacité C comme système de compensation. En effet, on aurait

$$\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{D}(t)}{\mathrm{d}t} = i_\mathrm{C}(t) \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathrm{jC}\omega\mathrm{U}_0 = -\mathrm{I}_0\,\sin(\varphi)$$

Avec $\mathrm{P} = \mathrm{U_0 I_0}\cos(\varphi)$,

$$\boxed{\mathrm{C} = -\frac{\mathrm{I}_0\,\sin(\varphi)}{2\pi f \mathrm{U}_0} = -\frac{\mathrm{P}\,\tan(\varphi)}{2\pi f {\mathrm{U}_0}^2} > 0}$$