Centrale Maths 2 PSI 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Batog (professeur en CPGE) ; il a été relu par Florian Metzger (docteur en mathématiques) et Sophie Rainero (professeur en CPGE).

Ce problème porte sur la notion de moment, qui est étudiée pour des variables aléatoires (I), des suites (II) et des fonctions réelles (III).

- La première partie porte sur les probabilités. Le moment $m_n(\mathrm{X})$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la variable aléatoire discrète réelle X est défini par $\mathrm{E}(\mathrm{X}^n)$, en cas d'existence.
  - La première moitié des questions est théorique et plutôt difficile pour une entrée en matière. Pour toute variable aléatoire X possédant des moments à tout ordre, on établit l'égalité
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} m_n(\mathrm{X})\,\frac{t^n}{n!} = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\,t\mathrm{X}})$$
  où t appartient à un intervalle $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$ sur lequel l'un des deux membres est bien défini. On utilise essentiellement les séries entières et un résultat hors-programme d'échange de deux sommes, énoncé en préambule.
  - La seconde moitié des questions exploite la fonction $t \mapsto \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\,t\mathrm{X}})$, qui caractérise la loi de la variable X, afin de démontrer deux résultats d'approximation : la loi de Poisson comme « limite » d'une suite de lois binomiales d'une part ; la loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$ comme « limite » d'une suite de lois uniformes discrètes d'autre part.
- La deuxième partie étend la définition des moments aux suites, le but étant de construire une suite non identiquement nulle dont tous les moments sont nuls (ce qui n'est pas possible avec la suite des valeurs d'une variable aléatoire discrète). On démontre d'abord qu'une certaine fonction φ définie par morceaux est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (avec le programme de Sup !), puis on la développe en série entière en 0 (encore avec le théorème en préambule). Enfin, on établit (avec des séries entières et des convergences normales) que la suite des coefficients obtenus répond au problème.
- La troisième partie prolonge le problème précédent au cas des fonctions réelles, où le moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$ d'une fonction f est défini par l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto t^p\, f(t)$, en cas d'existence. À nouveau, on établit le caractère $\mathscr{C}^\infty$ d'une certaine fonction, cette fois-ci à valeurs complexes, définie avec l'exponentielle complexe. Ensuite, quelques changements de variables permettent d'exhiber une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ non nulle dont tous les moments sont nuls.

Finalement, ce problème est un sujet sur les séries entières et l'analyse locale de première année. Signalons de nombreux calculs de limites, qui nécessitent une bonne dextérité avec les « petits o », « grands O » et équivalents.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

2 Adapter la démonstration concernant le cas $n = 2$.

3 Autrement dit, exprimer $m_n(\mathrm{X})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de $\mathrm{M_X}$ (et de ses dérivées en 0 d'après le cours).

4 En notant $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble à l'intérieur duquel X prend ses valeurs, poser

$$\forall\,(n,i) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n,i} = {x_i}^n\,\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)\,\frac{t^n}{n!}$$

Utiliser le théorème du préambule où n et i jouent respectivement le rôle de p et q. Ne pas s'occuper des sommes W.

5 Reprendre la démonstration de la question 4 avec la même suite double en considérant d'abord la somme en i puis la somme en n.

6 À l'aide de la formule du binôme, justifier que $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ possède un moment à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, établir la formule de la question en partant du produit $\mathrm{M_X}(t) \times \mathrm{M_Y}(t)$ et en utilisant les questions 4 et 5 pour retrouver $\mathrm{M_{X+Y}}(t)$.

7 Comparer la série du moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ à une série exponentielle.

8 Calculer plutôt $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{Z}})$.

9 Généraliser rapidement le résultat de la question 6 pour une somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes, puis calculer les moments d'une variable aléatoire de Bernoulli (attention au moment d'ordre 0 !)

Partie II

15 Pour la limite, se ramener à une expression de la forme $\mathrm{X}^3\mathrm{e}^{\mathrm{X}}$ pour $\mathrm{X} \to -\infty$. Pour le caractère $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

16 Démontrer le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

17 S'intéresser aux monômes de plus bas degré pour les polynômes P_p et Q_p de la question 16, afin de trouver un équivalent de $\varphi^{(p)}(x)$. Calculer la limite avec les mêmes ingrédients qu'à la question 15.

18 Démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{Q}(p)$: « φ est de classe $\mathscr{C}^p$ et $\varphi^{(p)}(1) = 0$ ».

19 Utiliser le développement en série entière de l'exponentielle.

20 Écrire le développement en série entière de $(1+u)^\alpha$ en utilisant les polynômes de Hilbert de l'énoncé. Changer d'indice dans chaque coefficient.

21 Isoler le terme de rang $q = 0$ dans l'expression de φ puis décaler l'indice q.

22 Justifier que $\mathrm{H}_j\big((i-2)/2 + j\big)$ est positif puis calculer la double somme en remontant les calculs des questions 20 et 19.

23 Utiliser les paquets W_n $(n \in \mathbb{N})$ du théorème en préambule.

24 Revenir à la définition du rayon de convergence d'une série entière.

25 Se ramener aux résultats de dérivation de la somme d'une série entière.

26 Penser au théorème des bornes atteintes.

27 Utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour calculer l'intégrale.

28 Isoler a_n dans l'égalité de la question 27. Remarquer que le polynôme en n est équivalent à n^p pour $n \to +\infty$.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

29 Considérer l'inégalité de la question 28 pour $p = 2$. Pour calculer la somme, invoquer la continuité sur $[\,0\,;1\,]$ de la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

30 Raisonnements identiques à ceux de la question 29.

31 Démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{R}(p)$: « la série $\sum n^k a_n$ converge et sa somme est nulle pour tout $k \in [\![\,0\,;p\,]\!]$. » Au cours de l'hérédité, utiliser la série de la question 30 avec $p+1$ au lieu de p, en décalant l'indice n pour manipuler a_n au lieu de a_{n+p+1} puis en développant le polynôme en n pour faire apparaître $n^{p+1} a_n$.

Partie III

33 Procéder comme à la question 16 pour le calcul des dérivées n-ièmes.

34 En notant $\alpha\,\mathrm{X}^a$ le monôme dominant de P_n, justifier que $\left|\theta^{(n)}(x)\right|$ est négligeable devant une expression de la forme $\mathrm{Y}^{a/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{Y}}$ avec $\mathrm{Y} \to +\infty$.

35 Travailler avec les parties réelle et imaginaire de θ.

36 Pour la convergence de l'intégrale, comparer la fonction intégrée avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$, intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour la valeur nulle de l'intégrale, considérer le changement de variable $u = t - p\pi$.

37 Appliquer soigneusement le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.

38 Reconnaître $\mathrm{Im}\,\theta$ dans l'intégrale I_p.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

I. Moments d'une variable aléatoire

1 Soient $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\,;n]\!]$.

- Si $x \in [\,0\,;1\,]$ alors $x^k \leqslant 1$.
- Si $x \in [\,1\,;+\infty\,[$ alors $x^k \leqslant x^n$ par comparaison des fonctions puissances.

Ainsi, $$\forall\, x \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant x^k \leqslant \max(1, x^n) \leqslant 1 + x^n \qquad (1 \text{ et } x^n \text{ positifs})$$

Puisque la variable aléatoire X est à valeurs positives,

$$\boxed{\forall\, k \in [\![1\,;n]\!] \qquad 0 \leqslant \mathrm{X}^k \leqslant 1 + \mathrm{X}^n}$$

2 Supposons que X admet un moment d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) et qu'elle est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Soit $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. D'après le théorème de transfert, il suffit de montrer que la série $\sum\limits_i {x_i}^k\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ converge pour établir que X^k admet une espérance.

1. Majoration du terme général : d'après la question 1 et comme toute probabilité est positive,
$$\forall\, i \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant {x_i}^k\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) \leqslant \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) + {x_i}^n\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$$
2. Convergence de la série majorante : d'une part, la série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ converge car de somme 1 ; d'autre part, la série $\sum {x_i}^n\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ converge puisque X^n admet une espérance par hypothèse. D'après la propriété de linéarité pour les séries convergentes, la série $\sum (1 + {x_i}^n)\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ converge.

Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum {x_i}^k\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ converge.

$$\boxed{\text{Si } m_n(\mathrm{X}) \text{ existe alors } m_k(\mathrm{X}) \text{ existe pour tout } k \in [\![1\,;n-1]\!].}$$

> Le résultat suivant qui figure dans le programme de MP permet de simplifier la réponse à la question 2 : « si $|\mathrm{X}| \leqslant \mathrm{Y}$ et que Y admet une espérance, alors X admet une espérance. » Justement, la question 1 donne $\left|\mathrm{X}^k\right| \leqslant 1 + \mathrm{X}^n$ et la linéarité de l'espérance assure que $1+\mathrm{X}^n$ admet bien une espérance lorsque X possède un moment d'ordre n.

3 D'après le cours, la somme $\mathrm{M_X}$ de la série entière $\sum \big(m_n(\mathrm{X})/n!\big)\, t^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,-\mathrm{R_X}\,;\mathrm{R_X}\,[$, où $\mathrm{R_X} > 0$ d'après l'énoncé. Toujours d'après le cours, les coefficients de la série entière sont ceux de la série de Taylor associée à la somme :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \frac{m_n(\mathrm{X})}{n!} = \frac{{\mathrm{M_X}}^{(n)}(0)}{n!}$$

d'où $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad m_n(\mathrm{X}) = {\mathrm{M_X}}^{(n)}(0)}$$

4 Soit $t \in\,]\,-\mathrm{R_X}\,;\mathrm{R_X}\,[$ fixé. Posons

$$\forall\, (n, i) \in \mathbb{N}^2 \qquad u_{n,i} = {x_i}^n\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)\, \frac{t^n}{n!}$$

où X est à valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Remarquons que

$$\mathrm{M_X}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} {x_i}^n\, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{n,i}$$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .