Centrale Maths 1 PSI 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Corentin Fierobe (ENS Lyon) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS Lyon) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet propose d'étudier les matrices cycliques et les matrices de Toeplitz, puis les liens qui existent entre les deux. Les matrices cycliques, hors-programme, sont souvent abordées pendant la prépa car elles possèdent des propriétés fortes en lien avec la réduction. Les matrices de Toeplitz, moins connues, permettent des calculs plus simples dans la résolution de systèmes linéaires. Elles interviennent également dans certaines équations aux dérivées partielles. Un des axes du sujet consiste à montrer que toute matrice cyclique réelle est semblable à une matrice de Toeplitz.

- La partie I établit des résultats qui seront utiles dans la suite, ainsi que des résultats sur les matrices de Toeplitz : par exemple, que toute matrice de taille 2 sur $\mathbb{C}$ est semblable à une matrice de Toeplitz, que les matrices tridiagonales (qui sont de Toeplitz) sont diagonalisables, ainsi que le calcul de leurs éléments propres.
- La partie II aborde les matrices circulantes, qui font partie des matrices de Toeplitz. Elle étudie leur forme et cherche à montrer que toute matrice circulante est diagonalisable et que l'on peut en calculer les éléments propres.
- La partie III, indépendante de la précédente, aborde les matrices cycliques réelles (souvent appelées « matrices compagnons » par les étudiants).
    - III.A étudie les relations entre cyclicité et diagonalisabilité, montre que le commutant d'un endomorphisme cyclique f est réduit à l'algèbre qu'il engendre $\mathbb{C}[f]$, et introduit une matrice N importante pour la suite.
    - III.B définit les coefficients diagonaux d'ordre $k \in \mathbb{Z}$ d'une matrice A (ce sont les coefficients $a_{i,j}$ de A tels que $j - i = k$), puis étudie les matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement les coefficients diagonaux d'ordre k.
    - Enfin, III.C généralise une propriété de la partie I en prouvant que toute matrice cyclique réelle est semblable à une matrice de Toeplitz.

Le sujet nécessite de bons réflexes en réduction des endomorphismes (réduction des matrices en dimension 2, utilisation de critères classiques de diagonalisabilité en terme de polynômes annulateurs, et de ceux moins classiques concernant la dimension des sous-espaces propres). Les questions ne sont pas insurmontables et se résolvent assez rapidement, exceptées les dernières qui sont plus ardues. La principale difficulté du sujet réside dans sa longueur et dans le grand nombre de questions à traiter. Le sujet est de périmètre restreint, se cantonnant au monde des matrices, avec très peu d'utilisation des endomorphismes associés.

Indications

Partie I

1 Pour gagner du temps sur cette question : ne pas faire une démonstration à la main (point par point, en revenant aux définitions) mais exhiber une application linéaire.

2 Cette question nécessite deux récurrences.

5 On pourra se rappeler que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

6 Partir d'une matrice de Toeplitz quelconque $\mathrm{T}(c, a, b)$ et essayer de déterminer a, b et c pour obtenir une matrice qui se diagonalise en

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{T}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}, \dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ convient.

10 Utiliser $x_0 = x_{n+1} = 0$ pour obtenir deux relations faisant intervenir r_1 et r_2.

11 Factoriser le polynôme intervenant en (I.1). Essayer de calculer $\lambda - a$ à l'aide des relations obtenues et de la question 10 pour définir ℓ.

12 Se rappeler l'expression des x_k en fonction de r_1 et r_2, et utiliser la question 10.

13 Étudier le nombre de valeurs propres obtenues grâce aux questions précédentes.

Partie II

14 Pour les puissances de M_n, deux façons de traiter le problème sont envisageables : on pourra soit trouver une formule de récurrence et la prouver, soit raisonner en terme d'endomorphisme dans une base adaptée.

15 Étudier le polynôme annulateur de la question 14. On pourra chercher des vecteurs propres s'exprimant à l'aide de racines de l'unité (observer la question 16, qui peut donner une idée de leur forme).

18 Le polynôme bien choisi pourra être le polynôme annulateur de la question 14.

20 Utiliser la matrice Φ_n de la question 16 pour diagonaliser les matrices circulantes.

Partie III

22 Calculer les itérées de f_{M} appliquées en u dans la base de vecteurs propres, et chercher à quelle condition cela forme une famille libre.

24 Résultat classique, qui se prouve d'habitude en calculant par récurrence le polynôme caractéristique de la matrice. Mais ici, il suffit de trouver une relation entre toutes les équations données par le système $\mathrm{C}(a_0, \ldots, a_{n-1})\mathrm{X} = \lambda \mathrm{X}$.

32 Remarquons ici deux manières de procéder : par calcul direct, ou bien en se servant du résultat de la question 29.

37 Calculer $\phi(\mathrm{M}) - \mathrm{M}$ en remplaçant P et P^{-1} par leurs expressions en C.

38 Calculer $\phi(\mathrm{N}) - \mathrm{N} - \mathrm{NC} + \mathrm{CN}$ en remplaçant P et P^{-1} par leurs expressions en fonction de C.

39 Se servir des deux questions précédentes pour exprimer B en fonction de $\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{N}$ et N' et d'une certaine matrice $\mathrm{T}' \in \mathrm{H}_{k+1}$.

40 On pourra remarquer que le calcul du noyau a été fait dans le cas complexe à la question 32.

41 Utiliser le résultat de la question 33 pour ne pas refaire des calculs.

42 S'inspirer du chapitre sur les adjoints d'endomorphismes sur un espace euclidien. En particulier on a la formule $\operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Im} f^{\perp}$ pour f endomorphisme d'un espace euclidien. On pourra également se servir des questions 34 et 36.

43 Décomposer $\mathrm{A}^{(k)}$ dans Δ_k selon une décomposition dont la forme est proposée à la question précédente. Utiliser ensuite le résultat de la question 39.

44 À l'aide d'une récurrence, trouver, pour une matrice cyclique donnée, une suite de matrices semblables les unes aux autres, qui ressemblent de plus en plus à une matrice de Toeplitz, c'est-à-dire dont le nombre de diagonales le long desquelles les coefficients sont égaux croît. On pourra se servir des questions 33, 36 et surtout 43.

I. Généralités et quelques exemples

1 Considérons l'application $\mathrm{T} : \mathbb{C}^{2n-1} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par l'énoncé, qui associe à un $(2n-1)$-uplet $(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1})$, la matrice de Toeplitz $\mathrm{T}(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1})$.

Par définition, $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Im}\ \mathrm{T}$. Pour montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de prouver que T est une application linéaire.

Vérifions-le : si $t = (t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$ et $t' = (t'_{-n+1}, \ldots, t'_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathrm{T}(t + \lambda t') = \mathrm{T}(t_{-n+1} + \lambda t'_{-n+1}, \ldots, t_{n-1} + \lambda t'_{n-1})$$

$$\mathrm{T}(t + \lambda t') = \begin{pmatrix} t_0 + \lambda t'_0 & \ldots & t_{n-1} + \lambda t'_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-n+1} + \lambda t'_{-n+1} & \ldots & t_0 + \lambda t'_0 \end{pmatrix}$$

et en utilisant la définition de l'addition et de la multiplication par un scalaire dans l'espace des matrices, on aboutit à

$$\mathrm{T}(t + \lambda t') = \begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-n+1} & \cdots & t_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t'_0 & \cdots & t'_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t'_{-n+1} & \cdots & t'_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{T}(t + \lambda t') = \mathrm{T}(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1}) + \lambda \mathrm{T}(t'_{-n+1}, \ldots, t'_{n-1})$$

ce qui conclut la preuve de la linéarité. Montrons ensuite que T est injective. En effet, si $(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$ vérifie $\mathrm{T}(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1}) = 0$ alors matriciellement

$$\begin{pmatrix} t_0 & \cdots & t_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-n+1} & \cdots & t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et donc par définition des matrices de Toeplitz,

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;n \,]\!]^2 \qquad 0 = [\mathrm{T}(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1})]_{i,j} = t_{j-i}$$

soit $(t_{-n+1}, \ldots, t_{n-1}) = (0, \ldots, 0)$. On conclut alors que T réalise un isomorphisme entre $\mathbb{C}^{2n-1}$ et son image, $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$. En particulier,

$$\dim \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \dim \mathbb{C}^{2n-1} = 2n - 1$$

et une base est donnée par l'image par T d'une base de C^{2n-1}, par exemple l'image par T de la base canonique. Ainsi,

$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension $2n-1$, dont une base est donnée par les matrices

$$\mathrm{T}(1, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}(0, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} \vdots & & & & \\ 0 & & (0) & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\mathrm{T}(0, \ldots, 0, 1, 0) = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & (0) & & 0 \\ & & & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}(0, \ldots, 0, 1) = \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 1 \\ & & 0 \\ (0) & & \vdots \\ & & \end{pmatrix}$$