Mines Physique 2 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur des expériences avec des électrons ou des atomes. Ses six parties sont indépendantes.

- La première partie s'intéresse au modèle classique de Thomson de l'atome. À l'aide du théorème de Gauss, on détermine la force de rappel du noyau sur l'électron, puis on calcule l'énergie mécanique de l'électron. Pour finir, en tenant compte du rayonnement de l'électron, on obtient le temps caractéristique de décroissance de son énergie.
- L'étude de l'énergie rayonnée par l'électron en présence de frottements est réalisée dans la deuxième partie. On calcule d'abord la position de l'électron, puis on détermine la nouvelle expression du temps caractéristique de décroissance des oscillations. On caractérise ensuite le rayonnement induit.
- La troisième partie est consacrée à une expérience d'interférences avec des électrons. Cette partie mélange des raisonnements d'optique ondulatoire et de mécanique quantique.
- Les quatrième et cinquième parties portent sur la même expérience. Dans un premier temps, on vérifie la théorie cinétique des gaz en étudiant la déviation du césium par un faisceau lumineux. Ensuite, cette expérience est modifiée pour mesurer la durée de vie du premier niveau excité de l'hélium. Ces deux parties peu calculatoires reposent essentiellement sur des raisonnements physiques.
- Enfin, le problème s'intéresse à l'irradiation d'une vapeur d'hydrogène.

Cette épreuve est de longueur raisonnable et alterne questions de cours et raisonnements plus difficiles. Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser. Notons que d'assez nombreuses applications numériques sont demandées et qu'elles ne sont pas forcément aisées sans calculatrice : il convient de s'entraîner régulièrement à pratiquer les calculs numériques approchés.

Indications

3 Pendant un intervalle $\mathrm{d}t$, l'énergie mécanique moyenne $\mathcal{E}$ varie de $-\mathcal{P}\,\mathrm{d}t$. Utiliser

$$\left\langle \dot{r}^2 \right\rangle = {\omega_0}^2 \left\langle r^2 \right\rangle$$

6 Déterminer la largeur spectrale $\Delta\nu$ telle que

$$\Delta\nu = \frac{c}{\mathcal{L}_{\mathrm{nat}}}$$

9 Calculer la valeur de la température T_0 pour avoir $\Delta\omega/(\Delta\omega)_{\mathrm{D}} \simeq 1$.

10 Le dispositif est similaire à l'expérience des fentes d'Young.

11 Utiliser le théorème de Gauss sur un cylindre de rayon $r \geqslant r_0$ et de hauteur h centré sur le fil en négligeant tout effet de bord.

12 Seul l'ordre de grandeur de r_0 est connu : il faut déterminer d'abord sa valeur.

14 Écrire la relation de De Broglie pour déterminer la longueur d'onde du faisceau d'électrons.

18 Dessiner un schéma en faisant apparaître les différentes quantités de mouvement et exprimer $\tan\theta$ de deux façons différentes.

24 L'énergie mécanique se conserve.

25 La probabilité de désexcitation $\mathrm{d}\mathcal{P}$ entre t et $t+\mathrm{d}t$ est le produit de la probabilité d'être excité à l'instant t et de la probabilité de se désexciter entre t et $t+\mathrm{d}t$.

26 Calculer le nombre d'atomes dans le cylindre de longueur $\mathrm{d}z$ et de section S. La fraction d'énergie qui contribue au rayonnement détecté est

$$\mathrm{d}^2\mathrm{E} = \mathrm{K}\,\mathrm{d}\mathcal{P}(z)\,\mathrm{d}\mathcal{E}$$

29 Utiliser la conservation de l'énergie.

31 Le nombre total d'atomes est conservé.

32 On a besoin de quatre nombres quantiques pour décrire un électron : ces nombres ont des valeurs permises limitées en fonction du nombre quantique principal n. En outre, le nombre N s'écrit

$$\mathrm{N} = g_1\,\mathrm{N}(\mathcal{E}_1) + g_2\,\mathrm{N}(\mathcal{E}_2) + \ldots$$

33 L'atome a un rayon fini R. Les états accessibles doivent vérifier $r_n < \mathrm{R}$.

Électrons et atomes par l'expérience

1 Tous les plans qui contiennent le point M et le vecteur $\widehat{e_r}$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge, d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{E_n}} = \mathrm{E_n}(\mathrm{M})\,\widehat{e_r}$$

La distribution de charge est de plus invariante selon θ et φ. Il vient

$$\overrightarrow{\mathrm{E_n}} = \mathrm{E_n}(r)\,\widehat{e_r}$$

Appliquons le théorème de Gauss sur une surface sphérique de rayon $r < a$:

$$\oiint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{E_n}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{Q_{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec $\mathrm{Q_{int}} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$, où ρ est la densité volumique de charge telle que

$$\rho = \frac{\mathrm{Q}}{(4/3)\,\pi\,a^3} = \frac{3\,e}{4\pi\,a^3}$$

Or, $$\oiint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{\mathrm{E_n}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = 4\pi\,r^2\,\mathrm{E_n}(r)$$

d'où $$\mathrm{E_n}(r) = \frac{e\,r}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}$$

Finalement, $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E_n}} = \mathrm{E_n}(r)\,\widehat{e_r} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{E_n}(r) = \frac{e\,r}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}}$$

Dans le champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E_n}}$, l'électron de charge $-e$ est soumis à la force

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F_n}} = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E_n}} = -\frac{e^2\,r}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}\,\widehat{e_r}}$$

Comparons cette expression à la force de rappel. On identifie

$$m\,{\omega_0}^2 = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}$$

d'où $$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,a^3}}}$$

2 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel du noyau supposé galiléen, en négligeant son poids,

$$m\,\ddot{\overrightarrow{r}} = -m\,{\omega_0}^2\,\overrightarrow{r}$$

Projetons cette équation sur l'axe $\widehat{e_r}$,

$$\ddot{r} + {\omega_0}^2\,r = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de solution

$$r(t) = \mathrm{A}\,\cos(\omega_0 t) + \mathrm{B}\,\sin(\omega_0 t)$$

où A et B désignent des constantes d'intégration. Avec $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$,

$$\mathrm{A} = r_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = 0$$

Finalement, $$\boxed{r(t) = r_0\,\cos(\omega_0 t)}$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de rappel du ressort $\mathrm{E_p}$ telle que

$$\mathrm{E_p} = \frac{1}{2}\, m\, {\omega_0}^2\, r^2$$

En l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique est conservée donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, m\, {\omega_0}^2\, r^2 = \mathrm{C^{te}}$$

Calculons la constante avec les conditions initiales à $t = 0$. Il vient

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\, {\omega_0}^2\, {r_0}^2}$$

3 Pendant une durée $\mathrm{d}t$, l'énergie mécanique moyenne est diminuée de $\langle \mathcal{P} \rangle\ \mathrm{d}t$, d'où

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = -\left\langle \mathcal{P} \right\rangle\ \mathrm{d}t = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0\, c^3}\ \left\langle \ddot{r}^2 \right\rangle\ \mathrm{d}t$$

D'après la question 2, $\qquad \dot{r}(t) = -\omega_0\, r_0\, \sin(\omega_0 t)$

Avec $\left\langle \cos^2(\omega_0 t) \right\rangle = \left\langle \sin^2(\omega_0 t) \right\rangle = 1/2$, on a $\left\langle \dot{r}^2 \right\rangle = {\omega_0}^2\ \left\langle r^2 \right\rangle$, ce qui implique

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m\ \left\langle \dot{r}^2 \right\rangle + \frac{1}{2}\, m\, {\omega_0}^2\ \left\langle r^2 \right\rangle = m\, {\omega_0}^2\ \left\langle r^2 \right\rangle$$

De même, $$\left\langle \ddot{r}^2 \right\rangle = {\omega_0}^4\ \left\langle r^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}\, {\omega_0}^2}{m}$$

Il vient $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e^2\, {\omega_0}^2}{6\pi\varepsilon_0\, m\, c^3}\, \mathcal{E}}$$

Notons $\Gamma = e^2\, {\omega_0}^2/(6\pi\varepsilon_0\, m\, c^3)$. Avec $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_0$, la solution s'écrit

$$\boxed{\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\, \mathrm{e}^{-\Gamma t} \qquad \text{avec} \qquad \Gamma = \frac{e^2\, {\omega_0}^2}{6\pi\varepsilon_0\, m\, c^3}}$$

Remplaçons les valeurs numériques des constantes dans l'expression de $1/\Gamma$,

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{6\pi \times 9 \times 10^{-12} \times 9 \times 10^{-31} \times 3^3 \times 10^{8\times 3}}{2^2 \times 10^{-19\times 2} \times 4^2 \times 10^{15\times 2}}$$

Simplifions cette relation, avec $4 \times 16 \simeq 60$, $3\pi \simeq 10$ et $9^3 \simeq 10^3$,

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma} = \frac{6\pi \times 9^2 \times 3^3}{4 \times 16} \times 10^{-11} \simeq 10^{-8}\ \mathrm{s}}$$

> La valeur de ω_0 donnée correspond à la longueur d'onde de 486,1 nm que propose l'énoncé.

La période d'oscillation de l'électron $\mathrm{T_0}$ vaut

$$\mathrm{T_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4 \times 10^{15}} \simeq 2 \times 10^{-15}\ \mathrm{s}$$

On en déduit que le temps caractéristique de décroissance de l'énergie est $5 \cdot 10^6$ fois plus grand que $\mathrm{T_0}$. **On peut donc considérer l'énergie mécanique constante**.