Centrale Physique 1 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Henri Lastakowski (professeur en CPGE) ; il a été relu par Louis Salkin (professeur en CPGE) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué de deux parties indépendantes. Toutes deux concernent le guidage d'ondes à travers des milieux anisotropes.

- La première partie concerne la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma. Après un début classique sur le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, le sujet aborde un point plus original, celui de la propagation d'une onde dans la ionosphère en présence du champ magnétique terrestre. Dans certaines conditions, ce champ magnétique n'est pas négligeable et donne naissance à des modes de propagation originaux, guidés par les lignes de champ magnétique de la Terre. Cette partie mélange des raisonnements proches du cours (électromagnétisme et mécanique) et des questions plus difficiles qui nécessitent de maîtriser les outils d'analyse vectorielle.
- La seconde partie démarre avec l'étude d'une onde acoustique dans un milieu homogène et isotrope, pour ensuite s'intéresser à la propagation dans un milieu anisotrope, à savoir le canal SOFAR. Dans ce canal, la vitesse de l'onde acoustique est fonction de la profondeur, ce qui provoque des effets de réfraction et conduit à un guidage de l'onde, permettant ainsi son transport sur de très longues distances.

Cette épreuve constitue un savant mélange de questions de type cours, et de questions plus calculatoires, typique d'une épreuve du concours Centrale, et constitue un excellent sujet de révision des chapitres sur la propagation d'ondes dans les milieux. On peut également souligner l'existence de questions moins guidées, s'appuyant à la fois sur l'ensemble d'une partie et sur l'analyse de documents, ce qui est bien dans l'esprit des programmes.

Indications

Q 8 Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron et montrer que le terme d'accélération est négligeable, sachant que pour une onde, négliger les échelles d'espace réduites signifie travailler à de grandes longueurs d'onde et donc à de basses fréquences.

Q 10 Se rappeler que pour une onde plane progressive harmonique dans le vide $\mathrm{I}_0 = \langle u_{\mathrm{EM}} \rangle c$, où $\langle u_{\mathrm{EM}} \rangle$ est la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique.

Q 12 Évaluer les ordres de grandeur permet de montrer que le courant de déplacement est négligeable. Décomposer le champ électrique suivant $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ pour aboutir à la relation de dispersion.

Q 14 La masse se conserve.

Q 25 Montrer que le déplacement élémentaire le long d'une surface d'égal chemin acoustique est perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$.

Q 27 En notant θ l'angle que fait localement $(\mathcal{C})$ avec la verticale, utiliser la loi de Descartes sur la réfraction pour exprimer $\sin\theta$ en fonction de z. Ensuite, en admettant que la trajectoire est circulaire de rayon r_{c}, exprimer de façon géométrique z en fonction de r_{c}, θ et θ_0.

Q 29 Exprimer le déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques, et le diviser par la célérité de l'onde pour avoir l'intervalle de temps élémentaire exprimé en fonction de θ et $\mathrm{d}\theta$.

Q 30 Calculer la distance SH en fonction de ω et θ_0.

Q 31 L'angle $\theta = \pi/2$ correspond à une propagation rectiligne horizontale s'effectuant à célérité constante.

Q 33 L'angle d'ouverture est régi par la diffraction par la gueule de l'animal. Le signal est brouillé si deux notes émises à des instants différents lors du chant de la baleine arrivent en même temps à l'émetteur.

Océans, atmosphère et communications

Q 1 Prenons comme système la particule de charge q et de masse m constante étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La seule force considérée étant la force magnétique de Lorentz, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0}$$

Projetons dans la base cartésienne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{q\mathrm{B}_0}{m}v_y, \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{q\mathrm{B}_0}{m}v_x \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0}$$

La dernière équation indique que **v_z est constant au cours du temps**, égale à $v_{/\!/}$. Par ailleurs, la force magnétique étant perpendiculaire au vecteur vitesse de la particule, sa puissance est nulle. Le théorème de la puissance cinétique implique donc que **l'énergie cinétique de la particule est constante et avec elle $\overrightarrow{v}^2$**.

Q 2 Le vecteur vitesse peut s'écrire $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v_{/\!/}}$ avec $\overrightarrow{w}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{e_z}$. Réécrivons le principe fondamental de la dynamique avec cette décomposition

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{/\!/}}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\left(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0} + \overrightarrow{v_{/\!/}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0}\right)$$

Or $\overrightarrow{v_{/\!/}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{v_{/\!/}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0} = \overrightarrow{0}$. Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{/\!/}}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0}$$

La force de Lorentz n'agit pas suivant $\overrightarrow{e_z}$, ainsi $\mathrm{d}\overrightarrow{v_{/\!/}}/\mathrm{d}t = \overrightarrow{0}$. On obtient alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0}}$$

Q 3 D'après la première question, la norme de la vitesse et v_z sont constants. Par conséquent, la norme de $\overrightarrow{w}$ l'est également et est égale à $|v_\perp|$. D'après la question 2,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}_0}$$

Avec $\overrightarrow{\Omega_\mathrm{c}} = -\dfrac{q}{m}\overrightarrow{\mathrm{B}_0}$,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{w}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\Omega_\mathrm{c}} \wedge \overrightarrow{w}$$

Cette expression est caractéristique d'un mouvement circulaire uniforme à vecteur vitesse angulaire de rotation $\overrightarrow{\Omega_\mathrm{c}}$. Ainsi

$$\boxed{\Omega_\mathrm{c} = -\frac{q\mathrm{B}_0}{m}}$$

Par ailleurs, le mouvement étant circulaire uniforme, la norme de l'accélération est ${v_\perp}^2/\rho_\mathrm{c}$ avec ρ_c le rayon de la trajectoire. En prenant la norme du principe fondamental de la dynamique, on a par suite

$$\frac{{v_\perp}^2}{\rho_\mathrm{c}} = \frac{|q\mathrm{B}_0|}{m}|v_\perp| \qquad \text{et par conséquent} \qquad \boxed{\rho_\mathrm{c} = \left|\frac{m v_\perp}{q\mathrm{B}_0}\right|}$$

Q 4 **Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 10^{-4} T** (1 Gauss). Ainsi, $|\boldsymbol{\Omega}_c| \simeq \mathbf{10^7}$ **rad.s^{-1}** pour un électron, et $|\boldsymbol{\Omega}_c| \simeq \mathbf{10^4}$ **rad.s^{-1}** pour un proton.

> Soulignons qu'en raison de leurs charges opposées, les sens de rotation de ces deux particules le sont aussi.
> Remarquons également que la question 9 demande d'effectuer le même calcul, avec la valeur $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ T, proche de celle retenue.

Q 5 En choisissant à nouveau d'étudier la particule chargée dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la seule force appliquée étant la force de Lorentz, on trouve

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}\right)$$

soit après projection

$$\boxed{\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}\left(E_1 + v_y B_0\right), \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB_0}{m}\,v_x \qquad \text{et} \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0}$$

Q 6 On cherche une solution constante de la forme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{V_d} = V_{dx}\,\overrightarrow{e_x} + V_{dy}\,\overrightarrow{e_y}$. En injectant cette solution dans les équations précédentes, on obtient

$$0 = \frac{q}{m}\left(E_1 + V_{dy}B_0\right) \qquad \text{et} \qquad 0 = -\frac{qB_0}{m}V_{dx}$$

Ainsi $$V_{dy} = -\frac{E_1}{B_0} \qquad \text{et} \qquad V_{dx} = 0$$

En conclusion, $$\boxed{\overrightarrow{V_d} = -\frac{E_1}{B_0}\,\overrightarrow{e_y}}$$

On obtient bien une unique solution de vitesse constante.

Q 7 Écrivons la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule de vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{V_d}$,

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{q}{m}\left(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{V_d} \wedge \overrightarrow{B_0}\right)$$

Or, d'après la question 6, $$\overrightarrow{0} = \frac{q}{m}\left(\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{V_d} \wedge \overrightarrow{B_0}\right)$$

En soustrayant les deux dernières équations, il vient

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{q}{m}\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{B_0}\right)}$$

Le vecteur vitesse est alors la somme de deux termes, $\overrightarrow{V_d}$ associé à un mouvement rectiligne uniforme dans la direction $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{u}$ associé à un mouvement circulaire uniforme dans le plan (Oxy). Le mouvement étant alors la superposition de ces deux mouvements : **la trajectoire est cycloïdale**.