Centrale Maths 2 PC 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Devilliers (ENS Cachan) ; il a été relu par Clément Mifsud (professeur en CPGE) et Sophie Rainero (professeur en CPGE).

Ce sujet a pour objet la fonction ζ de Riemann, définie par la somme de la série de fonctions

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Cette fonction est importante en mathématiques ; elle intervient notamment en arithmétique dans l'étude des nombres premiers.

- Dans la première partie, on étudie ζ sur son ensemble de définition. Cela peut sembler facile ; néanmoins, il faut rédiger de manière rigoureuse.
- La deuxième partie introduit la fonction auxiliaire

  $$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$$

  L'ensemble de définition de f n'étant pas un intervalle, l'étude de la fonction f demande un peu de prudence. Ensuite, on fait le lien entre le développement en série entière de f et la fonction ζ. Il en découle une expression sous forme intégrale de $\zeta(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$.
- Enfin, la troisième partie allie, avec élégance, les probabilités, l'arithmétique et la fonction ζ. Comme il y a très peu d'arithmétique au programme de PC, le sujet introduit toutes les notions et propriétés nécessaires. Après avoir défini deux variables aléatoires, on s'intéresse à la probabilité que deux entiers tirés au hasard soient premiers entre eux (c'est-à-dire que 1 soit leur seul diviseur positif commun). On établit un lien entre la fonction ζ et les nombres premiers. La dernière question, point d'orgue du sujet, montre que si on tire deux entiers de manière uniforme dans $[\![1\,; n]\!]$, alors la probabilité qu'ils soient premiers entre eux tend vers $1/\zeta(2)$ lorsque $n \to +\infty$.

Ce sujet est un beau problème d'analyse. Certaines questions assez techniques – comme la dérivation des intégrales à paramètre – sont à faire très méticuleusement, mais cet effort sera récompensé en fin de problème par l'obtention de jolis résultats. On peut ainsi proposer ce sujet d'une part comme outil de révision des séries de fonctions, des intégrales à paramètre, des fonctions développables en série entière et des probabilités, et d'autre part, pour être émerveillé par les mathématiques.

Indications

Partie I

2 Montrer la convergence normale sur tout segment de $\mathscr{D}_\zeta$.

Partie II

10 Déterminer l'ensemble des réels x tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + x \neq 0$.

11 Montrer que f est décroissante sur tout intervalle I tel que $\mathrm{I} \subset \mathscr{D}_f$.

12 Pour $m \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f(m)$ en fonction de $f(m-1)$.

13 Utiliser la question précédente pour trouver un équivalent de $f(\mathrm{M})$ quand M tend vers $+\infty$. En déduire un candidat naturel pour un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis prouver que ce candidat est bien un équivalent.

14 Pour $m \in \mathbb{N}^*$, écrire $f(x+m)$ en fonction de $f(x+m-1)$.

15 Dans la relation trouvée à la question 14, isoler le terme $(x+k)^{-1}$.

16 Utiliser le critère de d'Alembert.

17 Appliquer le théorème de dérivabilité k-ième des séries.

19 Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

22 Appliquer le théorème de dérivabilité k-ième des intégrales à paramètre pour dériver k fois la fonction f, puis utiliser la question 19.

Partie III

27 Calculer la variance de X grâce à $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$.

29 Utiliser l'équivalence de l'énoncé sur les nombres premiers divisant un entier ainsi que la question 28.

30 Appliquer le théorème de continuité monotone pour l'intersection d'événements, puis utiliser la question 28.

31 Montrer que les n événements $(\mathrm{X} \in p_i\mathbb{N}^*) \cup (\mathrm{Y} \in p_i\mathbb{N}^*)$, pour $i \in [\![1\,; n]\!]$, sont mutuellement indépendants.

33 En utilisant la question 32, majorer, pour tous m, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k=m+1}^{+\infty} (\mathrm{W}_n = k)\right)$ par une quantité qui ne dépend pas de n.

35 Comparer W avec une variable aléatoire de loi ζ de paramètre 2.

I. Fonction zêta

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum 1/n^x$ est une série de Riemann de paramètre x. D'après le cours, cette série converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{D}_\zeta = \left]\,1\,;+\infty\,\right[}$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\zeta_n : x \longmapsto n^{-x}$ définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Ainsi

$$\forall x \in \left]\,1\,;+\infty\,\right[= \mathscr{D}_\zeta \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta_n(x)$$

Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction ζ_n est continue sur I.
- Soient α, $\beta \in \left]\,1\,;+\infty\,\right[$ avec $\alpha < \beta$. Montrons la convergence normale de la série de fonctions $\sum \zeta_n$ sur $\mathrm{I} = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ζ_n est une fonction positive et décroissante sur I, ainsi

  $$\sup_{x\in \mathrm{I}} |\zeta_n(x)| = \sup_{x\in \mathrm{I}} \zeta_n(x) = \zeta_n(\alpha)$$

  Comme $\alpha \in \mathscr{D}_\zeta$, on en déduit que $\sum \sup\limits_{x\in \mathrm{I}} |\zeta_n(x)|$ converge. Par conséquent, $\sum \zeta_n$ converge normalement donc uniformément sur I. Ainsi, la série $\sum \zeta_n$ converge uniformément vers ζ sur tout segment de $\mathscr{D}_\zeta$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions permet de conclure que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur } \mathscr{D}_\zeta.}$$

3 Soient x, $y \in \left]\,1\,;+\infty\,\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x < y$ et $n \geqslant 2$. Alors $1^x = 1^y$ et $n^{-x} > n^{-y}$. Par combinaison de séries convergentes, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\zeta(x) - \zeta(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right) \\
&= \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} \qquad \text{car pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y} \geqslant 0 \\
\zeta(x) - \zeta(y) &> 0 \qquad \text{car } \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} > 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est strictement décroissante sur } \mathscr{D}_\zeta.}$$

> Attention à ne pas raisonner de la manière suivante :
>
> $$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} n^{-y} < \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} n^{-x}$$
>
> donc par passage à la limite lorsque M tend vers $+\infty$
>
> $$\zeta(y) < \zeta(x)$$
>
> En effet, les inégalités strictes ne passent pas à la limite. C'est pour cela qu'un terme strictement positif a été isolé dans l'expression de $\zeta(x) - \zeta(y)$.

4 Grâce à la question 3, on sait que la fonction ζ est décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$. De plus, la fonction ζ est positive, car pour tout $x \in \mathscr{D}_\zeta$, $\zeta(x)$ est une somme de termes positifs. On en déduit que ζ est minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, on a montré que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ admet une limite finie en } +\infty.}$$

> L'énoncé ne précise pas s'il veut qu'on démontre l'existence d'une limite finie ou pas. Dans le doute, on recommande de démontrer que la limite est finie.

5 Soit $x \in \mathscr{D}_\zeta =]\,1\,;+\infty\,[$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. La fonction $t \longmapsto t^{-x}$ étant décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$, elle est décroissante sur $[\,n-1\,;n+1\,] \subset\,]\,0\,;+\infty\,[$. On en déduit que pour tout $t \in [\,n\,;n+1\,]$, $t^{-x} \leqslant n^{-x}$ donc par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x}$$

La majoration s'obtient de même en intégrant sur $[\,n-1\,;n\,]$ l'inégalité $t^{-x} \geqslant n^{-x}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant 2 \quad\Longrightarrow\quad \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t}$$

6 Soient $x \in \mathscr{D}_\zeta =]\,0\,;+\infty\,[$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{M} \geqslant 2$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour $n \in [\![\,2\,;\mathrm{M}\,]\!]$, on a

$$\sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\int_2^{\mathrm{M}+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{\mathrm{M}} \frac{1}{n^x} \leqslant \int_1^{\mathrm{M}} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$$

Ajoutons $1 = 1^x$ à chacun des membres de la ligne ci-dessus, puis calculons les intégrales des membres de droite et de gauche. Comme $x \in \mathscr{D}_\zeta$, en particulier, $x \neq 1$, on obtient

$$1 + \frac{(\mathrm{M}+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{2^{1-x}}{1-x} \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{M}} \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{\mathrm{M}^{1-x}}{1-x} - \frac{1}{1-x} + 1$$

Lorsque M tend vers $+\infty$, M^{1-x} et $(\mathrm{M}+1)^{1-x}$ convergent vers 0 car $x > 1$. Par passage à la limite, on en conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_\zeta \qquad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}}$$

7 Lorsque x tend vers 1^+, par continuité de $x \longmapsto (x-1)2^{x-1}$ en 1^+, $(x-1)2^{x-1}$ tend vers 0^+, donc $\left[(x-1)2^{x-1}\right]^{-1}$ tend vers $+\infty$. D'après la question 6, la fonction ζ est ainsi minorée par une fonction tendant vers $+\infty$ en 1^+. On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ tend vers } +\infty \text{ en } 1^+.}$$

8 Lorsque x tend vers $+\infty$, $x-1$ et 2^{x-1} tendent vers $+\infty$. Ainsi, $(x-1)^{-1}$ et $\left[(x-1)2^{x-1}\right]^{-1}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. En appliquant le théorème d'encadrement au résultat de la question 6, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ tend vers 1 en } +\infty.}$$