Mines Maths 2 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (docteur en mathématiques) ; il a été relu par Thierry Limoges (professeur en CPGE) et Sophie Rainero (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur l'étude de plusieurs aspects des racines carrées d'une matrice complexe donnée. Il est composé de cinq parties non indépendantes.

- La première partie est l'occasion d'étudier l'existence d'une racine carrée pour quelques matrices données. On prouve également l'existence et l'unicité d'une racine carrée pour toute matrice symétrique réelle à spectre dans $\mathbb{R}_+^*$. Les questions sont très classiques.
- La deuxième partie a pour but de montrer l'existence d'une racine carrée de toute matrice complexe inversible en résolvant le système linéaire associé après trigonalisation de la matrice.
- La troisième partie est consacrée à la méthode de Newton pour le calcul effectif d'une racine carrée. On construit une suite de matrices analogue à celle utilisée dans le cas des suites réelles pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. On montre la convergence de la méthode avec des outils d'algèbre linéaire, dont certains font appel à des résultats sortis du programme il y a peu (norme subordonnée). Certaines questions nécessitent une solide maîtrise du programme pour les résoudre.
- Dans la quatrième partie est décrite une formulation récurrente équivalente à la méthode de Newton qui permet de montrer la convergence de la méthode pour le calcul de la racine carrée. Beaucoup de raisonnements par récurrence sont employés.
- Enfin, la dernière partie permet d'obtenir une condition suffisante sur le conditionnement d'une matrice afin que la méthode de Newton soit stable, c'est-à-dire qu'elle converge encore vers la racine si on bouge un peu le premier terme de la suite utilisée pour le calcul des termes par récurrence.

Le sujet aborde plusieurs notions fondamentales du programme de prépa : algèbre linéaire, réduction, espaces vectoriels normés, calcul différentiel. Mathématiquement intéressant, de difficulté inégale (parfois soutenue mais jamais excessive), il constitue un bon entraînement aux concours.

Indications

Partie A

1 Considérer pour tout réel $a \neq 0$, la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = ax$ dans $\mathbb{R}^2$. Attention : on demande quelles sont les matrices racines de A qui sont des polynômes en A. On ne cherche pas les polynômes parmi l'infinité de racines trouvée précédemment. Cette remarque est valable pour la deuxième question.

2 Pour l'existence de racines carrées, on pourra expliciter des matrices triangulaires supérieures strictes.

3 Pour l'existence utiliser la réduction des matrices réelles symétriques. Pour l'unicité montrer l'égalité des spectres puis $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{R} - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{I}_n)$ pour toute racine carrée R de A vérifiant les conditions requises.

Partie B

4 Exprimer sous la forme d'un système l'égalité des coefficients de U^2 et T en utilisant le fait que les matrices sont triangulaires. Pour la résolution du système, remarquer que la condition à vérifier permet de construire les coefficients par récurrence double sur les indices i et j. Noter en outre que $u_{i,i} + u_{j,j} = 0$ implique $t_{i,i} = t_{j,j}$ puis considérer les éléments diagonaux distincts de T.

5 La condition sur le spectre de A assure que les racines carrées de ses valeurs propres sont de partie imaginaire non nulle. Se servir alors de la construction faite à la question 4.

Partie C

6 Utiliser la formule sommatoire du coefficient $(\mathrm{AB})_{i,j}$.

7 Raisonner par double implication. Pour le sens direct utiliser un vecteur propre de B. Pour l'autre, justifier que m_A et m_B sont premiers entre eux et écrire une relation de Bezout.

8 Pour $\lambda \in \mathrm{sp}\ \mathrm{A} \cap \mathrm{sp}\ \mathrm{B}$, montrer que $\lambda \in \mathrm{sp}\,({}^t\mathrm{B})$ et considérer deux vecteurs propres pour A et ${}^t\mathrm{B}$.

9 Remarquer que $\mathrm{H} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{dF}_\mathrm{X}$ s'écrit $\mathrm{X\,H} = \mathrm{H}(-\mathrm{X})$ et mettre cela en perspective avec les questions 7 et 8.

10 Montrer plus généralement que dans E espace vectoriel normé de dimension finie, l'ensemble GL(E) est un ouvert en explicitant l'inverse de $u + h$ avec la série de terme général $(-1)^n (h\,u^{-1})^n$ pour h assez petit. On pourra d'abord montrer que

$$u \longmapsto \operatorname*{Sup}_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui vérifie la même propriété sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ que celle démontrée à la question 6.

11 Expliciter $\mathrm{dF}_{\mathrm{X}^*+\mathrm{H}}$ et son inverse.

12 Utiliser la question 11 avec $\mathrm{X} = \mathrm{X}^* + \mathrm{H}$ ainsi que la norme de la question 10.

13 Remarquer que $\mathrm{X}_{k+1} = \mathrm{G}(\mathrm{X}_k)$ et en déduire le résultat par récurrence sur k. L'énoncé donne une propriété sur ρ que l'on n'est pas en mesure de prouver : établir que $\|\mathrm{X}_k - \mathrm{X}^*\| \leqslant (\rho\,\mathrm{C})^{2^k}/\mathrm{C}$ pour tout $k \geqslant 0$ avec $0 < \rho < \mathrm{Min}\,(r, 1/\mathrm{C})$.

Partie D

14 Raisonner par récurrence pour les deux implications. Pour la réciproque, montrer que $\mathrm{dF}_{\mathrm{X}_k}$ est inversible en remarquant que $\mathrm{dF}_{\mathrm{X}_k}(\mathrm{Y}) = -\mathrm{F}(\mathrm{X}_k)$ est une équation affine n'admettant qu'une seule solution.

15 Raisonner par récurrence et prouver que $\mathrm{G}_k = \mathrm{H}_k$.

16 Utiliser la relation (**II**) pour prouver les propriétés demandées par récurrence sur k.

17 Remarquer que $\lambda_{0,\ell} = \mu$ pour initialiser une récurrence sur k et faire appel à la question 16.

18 La question 17 entraîne que $\lambda_{k,\ell} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{\lambda_\ell}$ pour tout ℓ. Utiliser ensuite une diagonalisation de V_k et passer à la limite.

Partie E

19 Calculer $(\mathrm{V}_0 + \Delta)({\mathrm{V}_0}^{-1} - {\mathrm{V}_0}^{-1}\Delta{\mathrm{V}_0}^{-1})$ puis montrer que $(\Delta{\mathrm{V}_0}^{-1})^2 = 0$.

20 Utiliser la question 19 pour prouver le résultat par récurrence sur k.

21 La question 20 fournit un critère de convergence portant sur η. En déduire une condition suffisante sur le conditionnement.

1 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et s_a la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $y = ax$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors, d'après le cours, s_a est une application linéaire involutive : ${s_a}^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. Soit S_a la matrice de s_a dans la base canonique. On a alors ${\mathrm{S}_a}^2 = \mathrm{I}_2$. Comme $s_a \neq s_b$ pour tous réels non nuls $a \neq b$ et que $\mathbb{R}$ est de cardinal infini et inclus dans $\mathbb{C}$, il en résulte que

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A} = \mathrm{I}_2 \text{ admet une infinité de racines carrées dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).}$$

> La matrice de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = (\tan\alpha)x$ est
>
> $$\mathrm{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$
>
> En effet on vérifie que
>
> $$\mathrm{M}_\alpha\, {}^t(\cos\alpha, \sin\alpha) = {}^t(\cos\alpha, \sin\alpha)$$
>
> ainsi que $$\mathrm{M}_\alpha\, {}^t(-\sin\alpha, \cos\alpha) = -\,{}^t(-\sin\alpha, \cos\alpha)$$
>
> Ce qui caractérise ladite symétrie.

On calcule aisément avec $\mathrm{A} = \mathrm{I}_2$ que $\mathrm{A}^k = \mathrm{I}_2$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ écrit sous forme développée $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{X}^k$. Il vient donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{I}_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \mathrm{I}_2 = \mathrm{P}(1)\, \mathrm{I}_2$$

Il en découle que
$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{A})^2 = \mathrm{A} &\iff \mathrm{P}(1)^2\, \mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_2 \\ &\iff \mathrm{P}(1)^2 = 1 \\ &\iff \mathrm{P}(1) = \pm 1 \\ \mathrm{P}(\mathrm{A})^2 = \mathrm{A} &\iff \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \pm\, \mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les seules racines carrées de } \mathrm{I}_2 \text{ qui sont des polynômes en } \mathrm{I}_2 \text{ sont } \mathrm{I}_2 \text{ et } -\mathrm{I}_2.}$$

2 Posons pour tout $a \in \mathbb{C}$ $$\mathrm{J}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient alors ${\mathrm{J}_a}^2 = \mathrm{A}$ pour tout $a \in \mathbb{C}$. Comme $\mathrm{J}_a \neq \mathrm{J}_b$ pour tous nombres complexes $a \neq b$, on obtient

$$\boxed{\text{La matrice } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ admet une infinité de racines carrées dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).}$$

On calcule aisément $\mathrm{A}^2 = 0$ puis $\mathrm{A}^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 2$. Soit alors P un polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ écrit sous forme développée $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{X}^k$. Il vient donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{A}^k = a_0\, \mathrm{I}_3 + a_1\, \mathrm{A}$$

Comme I_2 et A commutent, il en découle avec la formule du binôme de Newton

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})^2 = {a_0}^2\, \mathrm{I}_2 + 2a_0\, a_1\, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} {a_0}^2 & 0 & 2a_0\, a_1 \\ 0 & {a_0}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {a_0}^2 \end{pmatrix}$$