Centrale Maths 2 MP 2018 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (ENS Lyon) ; il a été relu par Guillaume Batog (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet d'analyse propose d'étudier les fonctions harmoniques, qui sont très utilisées en analyse complexe, et leurs liens avec les séries entières. Il propose également une application de ces résultats à la théorie des équations aux dérivées partielles avec la résolution du problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Les deux premières parties sont largement liées, tandis que les parties trois et quatre sont indépendantes des deux premières. La cinquième utilise des résultats issus de l'ensemble du sujet et permet une synthèse du problème.

- Dans la première partie, on se familiarise avec les fonctions harmoniques et on démontre quelques propriétés indispensables pour la suite du problème.
- Dans la deuxième partie, on cherche à expliciter la forme des fonctions harmoniques dans le cas où la fonction est à variables séparables puis radiales. En particulier, la formule du laplacien est démontrée en coordonnées polaires.
- Dans la troisième partie, on démontre le principe du maximum faible avec un raisonnement par l'absurde.
- Dans la quatrième partie, on se focalise sur le lien important qui existe entre les fonctions harmoniques et les fonctions développables en série entière. Les résultats qui jalonnent cette partie permettent en particulier de démontrer le célèbre théorème de d'Alembert-Gauss.
- La dernière partie utilise les précédentes pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$: étant donné une fonction f continue définie sur le cercle unité, peut-on trouver une fonction harmonique définie sur le disque unité fermé qui coïncide avec f sur le cercle ?

Ce problème nécessite des connaissances solides en calcul différentiel. On manipule de nombreuses dérivées partielles et les calculs peuvent être longs et fastidieux. La connaissance des dérivées partielles en coordonnées polaires est un avantage incontestable puisqu'elle permet la vérification des calculs effectués. Le sujet fait aussi appel à des connaissances en résolution d'équations différentielles du premier et du deuxième ordre, à de nombreuses reprises. La dernière partie nécessite également la maîtrise des théorèmes liés à la régularité des intégrales à paramètre et un certain recul sur le programme de l'année de MP.

La résolution de ce sujet est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de démontrer des grands théorèmes d'analyse fonctionnelle à partir d'outils extraits du programme de prépa.

Indications

Partie I

2 Raisonner par récurrence sur l'ordre des dérivées partielles et penser à utiliser le théorème de Schwarz.

3 Développer $\Delta(f^2)$ et utiliser le fait qu'une somme d'entiers positifs est nulle seulement si chaque entier est nul.

4 Chercher une fonction polynomiale très simple, puis utiliser la question 3.

Partie II

5 Calculer les dérivées partielles de f en fonction de u et v et évaluer cette expression en des points où u et/ou v ne sont pas nulles.

8 Utiliser la règle de la chaîne.

9 Dériver les expressions de la question 8 et utiliser la règle de la chaîne.

10 Utiliser les dérivées calculées en question 9.

11 Supprimer la dépendance en θ dans le résultat de la question 10 puis chercher l'expression de $\partial g/\partial r$ avant d'en calculer la primitive.

12 Chercher une fonction radiale et utiliser la question 11 pour se ramener à la résolution d'un système.

13 Chercher un r tel que $u(r) \neq 0$ et obtenir une expression de v en fonction de f et u.

14 Utiliser la question 10 et calculer les dérivées partielles de g en fonction de u et v puis évaluer cette expression en des points où u et/ou v ne sont pas nulles.

16 Trouver l'expression de z' puis calculer sa primitive.

17 Utiliser les questions 15 et 16.

18 Séparer le cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ et chercher les solutions 2π-périodiques.

19 Chercher l'équation vérifiée par Z et la résoudre.

20 Faire tendre r vers 0 dans les expressions de la question 18.

Partie III

21 Utiliser le fait que $\overline{\mathrm{U}}$ soit compact.

22 Dresser un tableau de variations de φ et chercher une contradiction.

24 Utiliser la question 23 sur g_ε et faire tendre ε vers 0.

25 Appliquer la question 24 à $f_1 - f_2$ et $f_2 - f_1$.

Partie IV

26 Utiliser les théorèmes de dérivation sous le signe somme pour obtenir les dérivées partielles de f.

27 Comparer $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ et déduire des relations entre les dérivées partielles de u et v.

31 Exprimer $\partial \mathrm{H}/\partial x$ en fonction de g et de $\mathrm{Re}\,(\mathrm{H})$.

32 Remplacer f par son expression et utiliser un théorème d'inversion de somme et d'intégrale.

34 Utiliser la question 32 et l'inégalité triangulaire.

33 Conclure grâce aux deux questions précédentes.

36 Utiliser la question 32 et le fait que $|f|$ admette un maximum en 0 pour obtenir une intégrale d'une fonction positive égale à 0.

37 Appliquer les questions 28 et 34 à l'inverse du polynôme considéré, puis faire tendre r vers $+\infty$.

Partie V

38 Utiliser le développement en série entière de $z \longmapsto 1/(1-z)$ et appliquer un théorème d'interversion de série et d'intégrale.

39 Choisir $h = 1$ dans la question 38.

40 Remarquer que h et $\mathcal{P}$ sont 2π-périodiques.

42 Utiliser une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\varphi}$ et appliquer un théorème d'inversion limite intégrale.

43 Utiliser les questions 39 et 40 et séparer l'intégrale en trois parties.

44 Utiliser les questions 42 et 43 pour montrer que g est solution du problème, puis la question 25 pour l'unicité.

I. Fonctions harmoniques : quelques propriétés

1 Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilisons la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

- $0 \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ car $(x \longmapsto 0) \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$ et $\Delta(x \longmapsto 0) = 0$.
- Si on pose $h = f + \lambda g$, $h \in \mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R})$ et par linéarité de la dérivation,

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial {x_i}^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial {x_i}^2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial {x_i}^2} = \Delta f + \lambda \Delta g = 0$$

On en déduit que $h \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}(\mathrm{U}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^2(\mathrm{U},\mathbb{R}).}$

2 Montrons par récurrence que la proposition

$$\mathscr{P}(k) : \qquad « \ \forall\, (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in [\![\, 1\,; n \,]\!]^k \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \in \mathcal{H}(\mathrm{U}) \ »$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car $f \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Choisissons $k+1$ indices $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$ de $[\![\, 1\,; n \,]\!]$ et notons

$$g = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_{k+1}}}$$

La propriété $\mathscr{P}(k)$ assure que $g \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$. On a alors

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}$$

Comme $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U},\mathbb{R})$, ses dérivées $(k+1)$-ième sont de classe $\mathscr{C}^2$ et g vérifie donc les hypothèses du théorème de Schwarz généralisé. On peut ainsi calculer

$$\begin{aligned}
\Delta \left(\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} \right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x_{i_1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial {x_i}^2} \right) && \text{(théorème de Schwarz)} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial {x_i}^2} \right) && \left(\text{linéarité de } \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
\Delta \left(\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (0) = 0 && (g \in \mathcal{H}(\mathrm{U}))
\end{aligned}$$

On en déduit que $\dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}}} \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$. $\mathscr{P}(k+1)$ est donc vraie.

- <u>Conclusion</u> :

$\boxed{\text{Toute dérivée partielle à tout ordre de } f \in \mathcal{H}(\mathrm{U}) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U},\mathbb{R}) \text{ appartient à } \mathcal{H}(\mathrm{U}).}$