X/ENS Physique B PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Amélie Gay (ENS Lyon) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce problème porte sur la physique des plasmas. Les questions sont réparties en deux parties relativement indépendantes.

- La première partie est consacrée à la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma soumis à un champ magnétique constant. On montre qu'il existe un domaine de pulsations interdites où la propagation ne peut se faire. Cette partie repose essentiellement sur des raisonnements similaires à ceux du cours sur la propagation d'une onde dans un plasma : relation de dispersion, vitesse de phase, atténuation et dispersion...
- La seconde partie traite de la propagation de deux ondes électromagnétiques dont l'une a une fréquence dans le domaine interdit. Cette partie, moins calculatoire, fait surtout appel à la compréhension du phénomène étudié. Il s'agit dans un premier temps d'adapter les résultats de la première partie puis d'interpréter les phénomènes qui apparaissent.

De longueur raisonnable pour une épreuve X/ENS, ce sujet ne présente pas de difficulté majeure. Il sera utile pour réviser et approfondir les idées et raisonnements du cours sur la propagation d'ondes dans un plasma. Il permet aussi de s'entraîner à faire des applications numériques en ordre de grandeur car les calculatrices étaient interdites pendant l'épreuve.

Indications

Partie 1

3 La longueur de Landau correspond à la distance à partir de laquelle les interactions électrostatiques sont ressenties par les particules.

5 Utiliser la formule de De Broglie.

6 Le milieu de propagation est constitué des ions d'argon.

8 Calculer la partie réelle du champ électrique.

13 Écrire les deux équations projetées en notation complexe.

14 La relation entre la puissance et l'amplitude du champ électrique est

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\varepsilon_0\,c\,{\mathrm{E}_0}^2$$

18 Utiliser l'expression de la vitesse complexe obtenue à la question 13.

20 La propagation de l'onde est impossible si $\underline{k}^2 < 0$.

21 Déterminer l'expression complexe de k.

Partie 2

24 Le vecteur $n(z,t)\,\overrightarrow{v_\mathrm{P}}$ ne dépend que de la variable z et n'a des composantes que selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$. Ainsi

$$\mathrm{div}\,\left(n(z,t)\,\overrightarrow{v_\mathrm{P}}\right) = 0$$

25 Écrire l'équation de Maxwell-Gauss.

29 Le mouvement transverse est caractérisé par v_+ et v_-.

33 Regarder l'évolution de la tangente à la courbe pour avoir des informations sur la vitesse de groupe.

Transparence électromagnétiquement induite dans un plasma froid magnétisé

1. Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma froid magnétisé

1 Les électrons ont une masse négligeable devant celle des ions d'argon. On peut donc **négliger** le mouvement des ions devant celui des électrons.

2 L'énergie d'agitation thermique vaut $k_B T$. La définition de la longueur de Landau r_L impose la relation

$$k_B T = \frac{|q_1\, q_2|}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_L}$$

L'énergie du système est celle de l'interaction entre un électron de charge $-e$ et un ion argon de charge $+e$. Il vient

$$\boxed{r_L = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\, k_B T} = 2\cdot 10^{-9}\ \text{m}}$$

3 La distance moyenne ℓ entre deux particules est directement liée à la densité volumique n_0 par

$$\ell = \frac{1}{{n_0}^{1/3}} = 5\cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

D'après sa définition, la longueur de Landau correspond à la distance caractéristique en dessous de laquelle les particules ressentent l'interaction électrostatique. D'après la question 2, $r_L \ll \ell$: les électrons sont donc suffisamment éloignés les uns des autres. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les collisions peuvent être négligées.}}$$

> Donnons quelques ordres de grandeur de la densité volumique des plasmas courants :
> - Vent solaire : $10^7\ \text{m}^{-3}$;
> - Couronne solaire : $10^{14}\ \text{m}^{-3}$;
> - Plasma de fusion (Tokamak) : $10^{21}\ \text{m}^{-3}$;
> - Intérieur du Soleil : $10^{32}\ \text{m}^{-3}$.

4 Par définition,

$$k_B T = \frac{1}{2}\, m\, u^2$$

d'où

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{2\, k_B T}{m}} = 5\cdot 10^5\ \text{m.s}^{-1}}$$

Comme $u \ll c$,

$$\boxed{\text{L'hypothèse non relativiste est justifiée.}}$$

5 L'énergie cinétique $\mathrm{E_c}$ peut s'écrire avec la quantité de mouvement $p = mv$:

$$\mathrm{E_c} = \frac{p^2}{2m}$$

Notons λ la longueur d'onde de De Broglie. Avec la formule de De Broglie $p = h/\lambda$,

$$\mathrm{E_c} = \frac{h^2}{2m\,\lambda^2}$$

Puisque $\mathrm{E_c} = k_\mathrm{B}\mathrm{T}$,

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\,k_\mathrm{B}\mathrm{T}}} = 2 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}$$

Comparons cette valeur à la distance moyenne ℓ calculée à la question 3. On a $\lambda \ll \ell$: les particules apparaissent alors localisées les unes par rapport aux autres.

$$\boxed{\text{Le problème peut être traité classiquement.}}$$

6 Le son se propage par l'intermédiaire des ions d'argon qui sont plus massifs que les électrons. D'après l'énoncé, la vitesse du son c_s vaut

$$\boxed{c_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{\gamma\,k_\mathrm{B}\mathrm{T}}{\mathrm{M}}} = 10^3\ \mathrm{m.s^{-1}}}$$

En utilisant la question 4, $\boxed{c_\mathrm{s} \ll u}$

Cette inégalité est cohérente avec le résultat de la question 1 où les ions sont supposés immobiles donc

$$\boxed{\text{Les ondes acoustiques peuvent être négligées.}}$$

> Il y a une ambiguïté de l'énoncé. En effet, il ne s'agit pas de la propagation du son dans le gaz d'électrons mais dans le plasma.

7 Utilisons l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

La notation complexe permet d'écrire cette relation sous la forme

$$-\mathrm{i}\,\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} = -\mathrm{i}\omega\,\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}$$

La notation $\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}$ désigne le champ magnétique en représentation complexe. On a alors

$$\begin{aligned}
\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} &= \frac{k}{\omega}\,\overrightarrow{e_z} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \\
&= \frac{k\,\mathrm{E_0}}{\omega}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\overrightarrow{e_x} - \mathrm{i}\,\overrightarrow{e_y}\right) \\
\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}} &= \frac{k\,\mathrm{E_0}}{\omega}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - kz)}\left(\overrightarrow{e_y} + \mathrm{i}\,\overrightarrow{e_x}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}} = \mathcal{R}\left\{\frac{k\,\mathrm{E_0}}{\omega}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\\0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(\omega t - kz)}\right\}}$$

8 Calculons la partie réelle du champ électrique :