Centrale Physique 2 PC 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Maimbourg (agrégé de physique) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Ce sujet comporte trois parties consacrées respectivement à la dynamique de particules dans une tuyère, à la diffraction d'ondes de matière et à l'interféromètre de Mach-Zehnder. La première partie est entièrement indépendante des deux autres.

- Dans la première partie, après avoir démontré plusieurs formules de thermodynamique et de dynamique des fluides, on cherche à estimer les ordres de grandeur de la température et de la vitesse des atomes en sortie de la tuyère.
- La diffraction de particules à travers un réseau optique modulé est étudiée dans la deuxième partie. Après avoir analysé l'interaction entre un atome et une onde électromagnétique stationnaire, on s'intéresse à la propagation d'une onde de matière dans ce potentiel. Cette partie repose essentiellement sur des notions du cours d'électromagnétisme et de mécanique quantique.
- Enfin, la troisième partie s'intéresse à la mesure de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même grâce à l'interféromètre de Mach-Zehnder. Réussir cette partie suppose d'avoir bien compris la précédente.

L'épreuve, relativement compliquée, fait appel à de nombreuses notions relatives aux ondes : propagation dans un milieu matériel, interaction avec une onde stationnaire, interférences, dualité onde-corpuscule. De longueur raisonnable pour cette banque de concours, le sujet alterne des questions très calculatoires et d'autres où le raisonnement physique est primordial. Cette épreuve peut servir de problème de révision une fois que les cours sur les ondes et la mécanique quantique sont maîtrisés.

Indications

Partie I

I.A.3 Écrire l'identité thermodynamique sur l'enthalpie.

I.A.5 Utiliser le résultat de la question I.A.3.

I.A.6 Prendre le logarithme du débit massique puis différentier cette expression.

I.B.1 L'enthalpie massique s'écrit, d'après la question I.A.2,

$$h(z) = \frac{\gamma\, r}{\gamma - 1}\,\mathrm{T}(z)$$

I.B.4 Calculer numériquement la grandeur $\phi_{\mathrm{col}}\,\mathrm{P}_0\,{\mathrm{T}_0}^{-4/3}$.

Partie II

II.A Dans un conducteur parfait, le champ électrique est nul. Écrire alors la continuité du champ électrique tangentiel en $x = x_{\mathrm{M}}$.

II.C.4 Écrire l'équation de d'Alembert dans l'espace des fréquences.

II.D.3 Projeter l'expression de $\overrightarrow{k_{\mathrm{d}}}$ sur l'axe $(\mathrm{O}z)$.

Partie III

III.A.2 Faire un schéma simple en faisant apparaître les ordres $0, -1$ et 1 pour connaître l'orientation de chaque rayon transmis et les vecteurs d'onde correspondants.

III.A.3 L'intensité est proportionnelle à $|\varphi_{\mathrm{h}} + \varphi_{\mathrm{b}}|^2$.

III.B.3 Utiliser le résultat de la question II.D.3.

III.B.4 Les réseaux 1 et 3 sont espacés d'une distance de 2L. Pour une rotation autour de l'axe $(\mathrm{O}y)$,

$$v_{3x}(t_2) - v_{1x}(t_2) = 2\mathrm{L}\,\Omega_y$$

Injecter ensuite les résultats des questions III.B.4, II.C.1 et II.D.1.

Interférométrie atomique

I. Caractérisation de la source atomique

I.A.1 L'écoulement étant stationnaire, **le débit massique est conservé**, d'où

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{m}} = \rho(z)\, v(z)\, \mathcal{A}(z)}$$

I.A.2 La loi des gaz parfaits s'écrit $\mathrm{P}(z)\,\mathrm{V}(z) = n\,\mathrm{R}\,\mathrm{T}(z)$. Comme $n = m/\mathrm{M}$,

$$\boxed{\mathrm{P}(z) = r\,\rho(z)\,\mathrm{T}(z) \qquad \text{avec} \qquad r = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}}$$

Pour un gaz parfait, la variation d'enthalpie massique s'écrit $\mathrm{d}h = c_{\mathrm{P}}\,\mathrm{dT}$ avec c_{P} la capacité thermique massique à pression constante. Or,

$$c_{\mathrm{P}} = \frac{\gamma \mathrm{R}}{\mathrm{M}(\gamma - 1)}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}h = \frac{\gamma\, r}{\gamma - 1}\,\mathrm{dT}}$$

I.A.3 Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait, la loi de Laplace s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{P}}{\rho^{\gamma}} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}}$$

La deuxième identité thermodynamique pour une transformation adiabatique réversible donne également

$$\mathrm{d}h = \mathrm{T}\mathrm{d}s + \frac{\mathrm{V}(z)}{m}\,\mathrm{dP} = \frac{\mathrm{V}(z)}{m}\,\mathrm{dP}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{dP}}{\rho(z)}}$$

> Le programme de PC stipule que les identités thermodynamiques ne doivent pas être connues mais rappelées par l'énoncé. Cette question est donc à moitié hors-programme.

I.A.4 Les transferts thermiques entre le gaz et les parois sont négligeables. De même, les forces de pesanteur sont négligées. Le premier principe appliqué à l'écoulement entre le four et la position z devient

$$\Delta h + \Delta e_{\mathrm{c}} = 0$$

avec e_{c} l'énergie cinétique macroscopique massique. Avec

$$\Delta e_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\left(v^2(z) - {v_0}^2\right) \simeq \frac{1}{2}\,v^2(z)$$

il vient

$$\boxed{\frac{1}{2}\,v^2(z) + h(z) = h_0}$$

I.A.5 D'après la question I.A.3, $\mathrm{P}(z) = \mathrm{C^{te}}\,\rho^\gamma(z)$. Exprimons le carré de la célérité :

$$\begin{aligned} {c_\mathrm{s}}^2 &= \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \rho}\right)_\mathrm{S} \\ &= \mathrm{C^{te}}\,\gamma\,\rho^{\gamma-1}(z) \\ &= \frac{\gamma\,\mathrm{P}(z)}{\rho(z)} && \text{avec } \mathrm{P}(z) = \mathrm{C^{te}}\,\rho^\gamma(z) \\ {c_\mathrm{s}}^2 &= \gamma\,r\,\mathrm{T}(z) && \text{d'après la question I.A.2} \end{aligned}$$

Par conséquent, $$\boxed{c_\mathrm{s}(z) = \sqrt{\gamma\,r\,\mathrm{T}(z)}}$$

I.A.6 Prenons le logarithme de l'expression du débit massique :

$$\ln \mathcal{D}_\mathrm{m} = \ln \rho + \ln v + \ln \mathcal{A}$$

> Il est toujours intéressant d'utiliser le logarithme et de différentier l'expression pour obtenir des termes en $\mathrm{d}f/f$.

D'après la question I.A.1, le débit massique est conservé, donc $\mathrm{d}(\ln \mathcal{D}_\mathrm{m}) = 0$, d'où

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho(z)} + \frac{\mathrm{d}v}{v(z)} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathcal{A}(z)} = 0$$

Exprimons le rapport $\mathrm{d}\rho/\rho$ en fonction de $\mathrm{d}v/v$. Or, avec la loi de Laplace,

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{P}}\,\mathrm{dP} = \rho(z)\,\chi_\mathrm{S}\,\mathrm{dP}$$

d'où $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho(z)} = \chi_\mathrm{S}\,\mathrm{dP} = \frac{\mathrm{dP}}{{c_\mathrm{s}}^2\,\rho(z)}$$

D'après la question I.A.3, $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho(z)} = \frac{\mathrm{d}h}{{c_\mathrm{s}}^2}$$

Avec la question I.A.4, $$\mathrm{d}h = -\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -v(z)\,\mathrm{d}v$$

Il vient $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho(z)} = -\frac{v(z)\,\mathrm{d}v}{{c_\mathrm{s}}^2} = -\mathcal{M}^2(z)\,\frac{\mathrm{d}v}{v(z)}$$

Combinons ces relations. Finalement,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathcal{A}(z)} + \frac{\mathrm{d}v}{v(z)}\left(1 - \mathcal{M}^2(z)\right) = 0}$$

I.A.7 Le long de la tuyère, le gaz est accéléré donc $\mathrm{d}v > 0$. Pour $v < c_\mathrm{s}$ (resp. $v > c_\mathrm{s}$), $\mathcal{M} < 1$ (resp. $\mathcal{M} > 1$). Il vient

$$\mathrm{d}\mathcal{A}(v < c_\mathrm{s}) < 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\mathcal{A}(v > c_\mathrm{s}) > 0$$

La section est décroissante pour $v < c_\mathrm{s}$ et croissante pour $v > c_\mathrm{s}$. **La section doit donc posséder un minimum**. À la transition, $v = c_\mathrm{s}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\mathcal{M} = 1}$.