X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2017 Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

L'épreuve de physique et sciences de l'ingénieur est constituée de deux grandes parties indépendantes. La partie physique s'articule en deux temps, autour de la modélisation puis de l'utilisation d'un transducteur électroacoustique.

- Il s'agit tout d'abord d'établir les équations de fonctionnement en émetteur et en récepteur. Après un bilan énergétique, on cherche les positions d'équilibre puis on étudie comment celles-ci sont perturbées par l'émission ou la réception d'une onde acoustique.
- Ensuite, on s'intéresse à deux applications du transducteur, la vélocimétrie et la localisation d'une cible. Les connaissances sur la diffraction et sur les interférences sont utilisées. Le sujet propose finalement une courte partie de traitement du signal, qui est originale en prépa.

La partie sciences de l'ingénieur est consacrée aux bâtiments de grande hauteur. On distingue ici encore trois parties largement indépendantes.

- On débute par l'étude du déplacement d'une tour soumise au vent et à son poids. Plusieurs modèles sont proposés, du plus simple au plus élaboré. Citons notamment la mise en équation matricielle du mouvement de la tour discrétisée en N étages.
- Le sujet aborde ensuite le comportement de la tour soumise à une excitation sismique. Le passage d'une base de coordonnées réelles à une base de coordonnées modales est au centre des questions.
- Enfin, dans la dernière partie, sans doute plus abordable que les autres avec des questions très proches du cours, on étudie le contrôle et la commande d'un ascenseur, avec des modèles d'asservissement d'ordre 1 puis d'ordre 2.

Cette épreuve comporte de nombreuses parties indépendantes, ce qui permettait au candidat bloqué sur une question de poursuivre sur un autre thème. Elle balaie une large part du programme de physique, de sciences de l'ingénieur et même de mathématiques. La difficulté des questions est très variable, allant de la question de cours à des développements matriciels fastidieux. L'épreuve est peu guidée ; elle permettait de bien identifier les candidats ayant à la fois du recul sur le programme et une bonne maîtrise des raisonnements.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Indications

Partie Physique

1 Exprimer l'énergie cinétique et les énergies potentielles élastique et électrique.

2 Le système est le condensateur, en interaction avec le générateur électrique et la force acoustique.

6 Quel est l'effet d'une modification de A_0 sur la courbe $A_0G(X)$? Pour l'étude de la stabilité des positions d'équilibre, interpréter l'équation statique en termes de forces et déterminer le sens de la résultante des forces qui s'exercent après un petit déplacement.

7 Développer au premier ordre le produit $\Psi^2 \dfrac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}$.

8 Montrer qu'un terme en φ^2 remplace un terme en φ.

10 On peut négliger le terme d'émission lorsque l'impédance n'est pas trop élevée puisque l'émission est liée à l'amortissement.

13 Repartir du bilan de puissance fait à la question 2, avec une charge constante.

19 Utiliser directement les résultats de la diffraction.

21 Il s'agit d'un système analogue à un réseau de diffraction. Lorsque tous les signaux individuels sont en phase, le signal résultant est maximal.

22 Le retard de phase dû à la propagation vaut $\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Le déphasage est la différence entre les retards de phase des deux ondes.

24 Il faut procéder à une démodulation d'amplitude par détection synchrone.

30 Exprimer le déphasage entre les signaux issus de deux transducteurs voisins. Il doit être nul à 2π près pour que les interférences soient constructives.

33 La fonction F est obtenue en déplaçant le signal émis le long de l'axe temporel avant de calculer l'intégrale. Pour simplifier, raisonner en faisant varier discrètement τ pour calculer F lorsque e_1 et r_1 sont en phase et ont 1, 2 puis N périodes en commun.

Partie Sciences de l'ingénieur

1 Appliquer le théorème du moment cinétique au modèle proposé.

4 Remarquer qu'il s'agit d'un système d'ordre 2 pseudo-périodique.

6 Exprimer ε en fonction de θ_0 et des autres paramètres du problème.

7 Faire le bilan des actions mécaniques sur la tige considérée.

10 Inverser la matrice $\underline{\underline{\mathrm{K}}}$ en utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss.

11 La figure 5 est erronée. Les déplacements u_1 et u_2 sont les écarts à la position d'équilibre des masses. Penser à préciser le référentiel d'étude.

14 Multiplier l'équation matricielle à sa gauche par la transposée d'un des vecteurs propres et utiliser les M- et K-orthogonalités des vecteurs propres.

15 Utiliser le formalisme complexe pour résoudre le problème posé en régime sinusoïdal forcé.

18 Le théorème de la valeur finale permet de répondre.

26 Dériver la position pour obtenir les instants pour lesquels la vitesse s'annule et en déduire la hauteur des pics.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

1. Physique

1 Le condensateur stocke de l'énergie sous forme électrique, cinétique et élastique via sa membrane déformable. Son énergie électromécanique s'écrit

$$\boxed{\mathcal{E}(x,\dot{x};\mathrm{Q}) = \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{C}(x)} + \frac{1}{2}\,k\,x^2}$$

Par définition de la capacité d'un condensateur, on a

$$\boxed{\mathrm{Q} = \mathrm{C}\,\Psi}$$

et l'intensité du courant vaut $$\boxed{i = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}t}}$$

En utilisant la formule de l'énoncé, donnant la capacité d'un condensateur plan,

$$\boxed{\mathrm{C}(x) = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{S}}{a+x}}$$

2 Le système $\mathcal{S}$ est en interaction avec les systèmes extérieurs électrique (Ψ) et mécanique (F), desquels il reçoit de la puissance. L'effet de la gravité est négligé devant celui des autres forces. La variation d'énergie $\mathcal{E}$ entre les instants t et $t+\,\mathrm{d}t$ est due au travail des forces extérieures :

$$\mathcal{E}(t+\,\mathrm{d}t) - \mathcal{E}(t) = \delta\mathrm{W}_\mathrm{F} + \delta\mathrm{W}_\Psi$$

On obtient le bilan de puissance en divisant par la durée dt :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_\mathrm{F} + \mathcal{P}_\Psi}$$

3 Exprimons les différentes puissances. Par définition, celle de la force F s'écrit

$$\mathcal{P}_\mathrm{F} = \mathrm{F}\,\dot{x}$$

et la puissance électrique $$\mathcal{P}_\Psi = i\,\Psi = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}t}\,\Psi$$

Or, par définition de la capacité, on a

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{C}\,\Psi)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}t}\,\Psi + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{C} = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}\,\Psi\,\dot{x} + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{C}\,\dot{x}$$

Par conséquent, la puissance électrique extérieure vaut

$$\mathcal{P}_\Psi = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}\,\Psi^2\,\dot{x} + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{C}\,\dot{x}\,\Psi$$

Ensuite, grâce à la question 1, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}(\dot{x}^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{C}\,\Psi^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k\,\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t} \\
&= m\,\dot{x}\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\Psi^2\,\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{C}\,\Psi\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} + k\,x\,\dot{x} \\
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} &= m\,\dot{x}\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\Psi^2\,\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} + \mathrm{C}\,\Psi\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} + k\,x\,\dot{x}
\end{aligned}$$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Avec le bilan de puissance, on conclut

$$m\,\dot{x}\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\Psi^2\,\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} + \mathrm{C}\,\Psi\,\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} + k\,x\,\dot{x} = \mathrm{F}\,\dot{x} + \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x}\,\Psi^2\,\dot{x} + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{C}\,\dot{x}\,\Psi$$

donc

$$\boxed{m\,\ddot{x} + k\,x - \frac{1}{2}\Psi^2\,\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{F}}$$

Cette relation est le principe fondamental de la dynamique appliqué à la membrane souple. Trois forces entrent en jeu : l'action mécanique F de l'onde sur la membrane, le rappel élastique de la membrane souple et l'interaction électrique liée aux charges présentes sur les armatures.

$$\boxed{\text{Le terme } \frac{1}{2}\Psi^2\,\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x} \text{ est la force d'origine électrostatique subie par la membrane.}}$$

> À partir d'une approche énergétique, on retombe sur le principe fondamental de la dynamique, qu'on n'aurait jamais pu exprimer aussi rapidement en faisant le bilan des forces puisque celle d'origine électrostatique ne s'exprime pas simplement.

4 Les énergies potentielles élastique et électrique s'écrivent respectivement

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_\Psi = \frac{\varepsilon_0 \mathrm{S}\,{\Psi_0}^2}{2(a+x)}$$

Le rapport de ces deux énergies est sans dimension. Exprimé en $x = a$, il est égal à A_0.

$$\boxed{\text{Le terme } \mathrm{A}_0 \text{ compare les énergies potentielles élastique et électrique en } x = a.}$$

5 Réécrivons l'équation obtenue à la question 3 dans le cas statique, avec $\mathrm{F} = 0$:

$$k\,x = \frac{1}{2}\Psi^2\,\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{d}x} = -\frac{\varepsilon_0 \mathrm{S}\,{\Psi_0}^2}{2(x+a)^2}$$

soit

$$x = -\frac{\varepsilon_0 \mathrm{S}\,{\Psi_0}^2}{2k\,a^2\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^2}$$

En posant, comme l'invite l'énoncé, $\mathrm{X} = \dfrac{x}{a}$ et $\mathrm{A}_0 = \dfrac{\varepsilon_0 \mathrm{S}\,{\Psi_0}^2}{2k\,a^3}$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{A}_0\mathrm{G}(\mathrm{X}) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{G}(\mathrm{X}) = \frac{-1}{(1+\mathrm{X})^2}}$$

> Ce résultat correspond bien à la fonction tracée à la figure 3 de l'énoncé.

6 Puisque $\mathrm{G}(\mathrm{X}=0) = -1$, on lit, au signe près, la valeur A_0 lors du croisement de la courbe avec l'axe des ordonnées :

$$\boxed{\mathrm{A}_0 = -\mathrm{A}_0\mathrm{G}(0) = 0{,}1}$$

Augmenter A_0 correspond grossièrement à dilater la courbe $\mathrm{A}_0\mathrm{G}(\mathrm{X})$ vers le bas. Pour qu'une solution existe, il faut que cette courbe coupe la droite $y = \mathrm{X}$. Graphiquement, en dilatant la courbe vers le bas, le point de tangence se situe autour de $\mathrm{X} = -0{,}4$ soit pour

$$-0{,}4 = -\frac{{\mathrm{A}_0}^*}{(1-0{,}4)^2} \qquad \text{ou encore} \qquad {\mathrm{A}_0}^* = 0{,}4 \times 0{,}6^2 = 0{,}14$$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .