CCP Maths PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Antoine Sihrener (Professeur en CPGE).

L'épreuve est constituée d'un seul problème, portant sur l'étude des puissances d'une matrice stochastique. Les matrices stochastiques sont les matrices réelles à coefficients positifs dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Ces matrices apparaissent notamment en modélisation de phénomènes aléatoires (d'où leur nom, stochastique étant synonyme d'aléatoire).

- La partie I propose de calculer explicitement le terme général de la suite des puissances d'une matrice stochastique de taille 2×2. On applique ensuite ce résultat au calcul de la probabilité de bonne transmission d'un signal binaire à travers un ensemble de relais.
- Dans la partie II, on démontre plusieurs résultats portant sur les éléments propres d'une matrice stochastique, notamment que 1 est valeur propre et que toute valeur propre est de module inférieur ou égal à 1. On affine ces résultats dans le cas d'une matrice stochastique à coefficients strictement positifs, en montrant que 1 est valeur propre simple et que toute autre valeur propre est de module strictement inférieur à 1.
- Les résultats de la partie II sont mis en application dans la partie III. On y étudie une certaine marche aléatoire sur un graphe à 4 sommets, et en particulier son comportement après un temps très long.
- Enfin, on prouve dans la partie IV que la suite des puissances d'une matrice stochastique à coefficients strictement positifs converge vers une matrice stochastique dont toutes les lignes sont égales.

Les parties sont indépendantes, à l'exception de la partie III qui nécessite d'utiliser certains résultats obtenus dans la partie II. Ce sujet balaie une vaste partie du programme (algèbre linéaire, probabilités, suites numériques) et constitue une bonne occasion d'entraînement et de révision. Attention toutefois, les questions sont de difficultés assez inégales : certaines ne demandent que des raisonnements classiques, d'autres requièrent plus de recherche et d'initiative.

Indications

Partie I

1 Déterminer le noyau de $\mathrm{A}(\alpha, \beta) - \mathrm{I}_2$.

2 Il se pourrait qu'une deuxième valeur propre soit donnée par l'énoncé...

3 Utiliser la diagonalisation obtenue à la question précédente.

5 Appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir la première relation. En déduire par récurrence une relation entre la loi de X_n et celle de X_0. Appliquer à nouveau la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité de bonne transmission des messages 0 et 1. Pour l'inégalité, distinguer les cas $\alpha \leqslant \beta$ et $\alpha \geqslant \beta$. On écrira la probabilité de bonne transmission comme la somme de $r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n$ et d'une quantité positive.

6 Tirer parti du fait que les variables aléatoires $\mathrm{X}_n^1, \cdots, \mathrm{X}_n^\ell$ sont indépendantes.

Partie II

10 Utiliser la caractérisation donnée par la question 9.

11 Remarquer que la question 10 autorise à ne traiter que le cas $p = 1$. Majorer alors chacune des composantes du vecteur $\mathrm{A}x$.

12 En exploitant les résultats des questions 9 et 11, montrer successivement que $\rho(\mathrm{A}) \leqslant 1$ et $\rho(\mathrm{A}) \geqslant 1$.

13 Considérer un vecteur propre x associé à λ, et choisir i comme l'indice de la coordonnée de x de plus grand module.

14 Utiliser la question 13 pour montrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

15 Vérifier que la définition d'une matrice à diagonale strictement dominante est satisfaite, en notant que l'inégalité stricte provient du fait que les coefficients de A sont strictement positifs.

16 Utiliser les questions 9 et 15.

17 Considérer une valeur propre de module 1 et utiliser la question 13.

Partie III

18 Appliquer la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = i)$ pour tout i.

19 Utiliser les questions 9 et 16.

21 On peut observer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Q} - \mu \mathrm{I}_4$ soit de rang 1. Le déterminer.

22 Considérer une base orthonormée de vecteurs propres et appliquer les formules de changement de base. Pour la seconde partie, calculer $\mathrm{Q}^p - \mathrm{R}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et utiliser l'homogénéité de la norme.

Partie IV

23 Les deuxième et quatrième inégalités s'obtiennent en comparant les coefficients de A^{p+1} à ceux de A^p.

24 Exprimer les coefficients de A^{p+1} en fonction de ceux de A^p en faisant apparaître le terme correspondant au minimum ou au maximum.

25 Utiliser la question 24.

26 Utiliser les questions 23 et 25.

I. Cas $n = 2$

1 Par définition, $$\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

Remarquons que la deuxième colonne est l'opposée de la première, et comme (α, β) est non nul, la matrice est donc de rang 1. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2)) = 2 - \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2) = 1$$

Cela montre que 1 est valeur propre et comme le sous-espace propre associé est de dimension 1, il suffit de déterminer un de ses vecteurs non nuls pour en obtenir une base. Si ${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2) &\iff \begin{cases} -\alpha x + \alpha y = 0 \\ \beta x - \beta y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \qquad\qquad \text{car } (\alpha,\beta) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\text{Le réel 1 est valeur propre de } \mathrm{A}(\alpha,\beta)\text{, de sous-espace propre associé } \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}\,\{{}^t(1,1)\}.}$$

> Le calcul du polynôme caractéristique est inutile ici car il ne donne aucune information sur les sous-espaces propres. Cette méthode est à réserver aux cas où on ne connaît pas a priori les valeurs propres.

2 La notation $\lambda = 1-(\alpha+\beta)$ introduite dans l'énoncé incite à penser que λ pourrait être valeur propre de $\mathrm{A}(\alpha,\beta)$. Vérifions-le.

$$\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \lambda\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 1-(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Remarquons que les deux lignes sont identiques, et non nulles car $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. La matrice $\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \lambda\mathrm{I}_2$ est donc de rang 1, par suite λ est valeur propre de $\mathrm{A}(\alpha,\beta)$ et le sous-espace propre associé est de dimension 1 d'après le théorème du rang. De plus, comme α et β sont positifs non tous deux nuls, $\alpha + \beta > 0$ d'où $\lambda \neq 1$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{A}(\alpha,\beta) \text{ possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.}}$$

> Si l'on ne remarque pas que λ est valeur propre, le calcul du polynôme caractéristique χ s'avère alors nécessaire.
>
> $$\begin{aligned} \chi &= \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta))\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}(\alpha,\beta)) \\ &= \mathrm{X}^2 - (2-(\alpha+\beta))\mathrm{X} + (1-(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$
>
> Son discriminant vaut
>
> $$\Delta = (2-(\alpha+\beta))^2 - 4(1-(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta)^2$$
>
> et puisque $\sqrt{\Delta} = |\alpha+\beta| = \alpha+\beta$, on retrouve bien les valeurs propres
>
> $$r_1 = \frac{2-(\alpha+\beta)+\sqrt{(\alpha+\beta)^2}}{2} = 1 \;;\; r_2 = \frac{2-(\alpha+\beta)-\sqrt{(\alpha+\beta)^2}}{2} = \lambda$$

Pour obtenir les matrices de passage, il reste à déterminer un vecteur propre associé à λ. Si ${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \lambda \mathrm{I}_2\right) \iff \begin{cases} \beta x + \alpha y = 0 \\ \beta x + \alpha y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \beta x = -\alpha y$$

Le vecteur non nul ${}^t(\alpha, -\beta)$ est donc un vecteur propre associé à λ. Si l'on pose

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

alors
$$\mathrm{A}(\alpha,\beta) = \mathrm{PDP}^{-1}$$

Calculons P^{-1} par opérations élémentaires.

> Pour calculer l'inverse d'une matrice P, on effectue des opérations élémentaires soit sur les lignes, soit sur les colonnes, mais pas les deux, au risque d'obtenir des résultats erronés.

On part de
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & -\beta & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Effectuons
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta) & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$$

Continuons avec
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha+\beta} & -\dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{\mathrm{L}_2}{\alpha+\beta}$$

Terminons par
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha+\beta} & -\dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \alpha \mathrm{L}_2$$

On obtient finalement $\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha+\beta \neq 0$, et

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour tout couple de réels } (\alpha,\beta) \in [0,1]^2 \backslash \{(0,0)\}, \\ \text{la matrice } \mathrm{A}(\alpha,\beta) \text{ est égale à } \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \text{ avec} \\ \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

3 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{A}(\alpha,\beta)^p = (\mathrm{PDP}^{-1})^p = \mathrm{PD}^p\mathrm{P}^{-1}$. La matrice D étant diagonale, on trouve directement que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{D}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix}$$

En calculant le produit matriciel $\mathrm{PD}^p\mathrm{P}^{-1}$, on en déduit

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall (\alpha,\beta) \in [0,1]^2 \backslash \{(0,0)\} \quad \mathrm{A}(\alpha,\beta)^p = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^p & \alpha(1-\lambda^p) \\ \beta(1-\lambda^p) & \alpha + \beta\lambda^p \end{pmatrix}}$$

4 Pour $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$, on a $-1 < 1 - (\alpha+\beta) < 1$, autrement dit $|\lambda| < 1$. Il s'ensuit que la suite $(\lambda^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Finalement, il vient d'après la question 3