

## Centrale Physique 1 PC 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Jean (ENS Ulm) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

---

Le problème étudie les conséquences du mouvement d'un fluide conducteur électrique en présence de champ magnétique. Il se focalise sur l'effet dynamo et tente d'expliquer l'origine du champ magnétique terrestre.

- La première partie, de magnétostatique, présente le dispositif de type « bobines de Helmholtz » qui permet de mesurer le champ magnétique terrestre. Les propriétés du dispositif sont discutées à partir du champ magnétique produit par une spire sur son axe, puis on explique comment l'utilisation d'un dipôle magnétique couplé avec les « bobines de Helmholtz » permet une mesure du champ géomagnétique.
- La deuxième partie est dédiée à l'effet dynamo. Elle commence par évoquer les différentes hypothèses qui ont été avancées au fil des siècles, pour tenter d'expliquer l'origine du champ magnétique terrestre. On étudie par exemple le moment magnétique induit par la rotation d'un objet chargé. Ces hypothèses sont discutées à l'aide d'un document d'information sur le noyau terrestre et les matériaux magnétiques. La deuxième sous-partie introduit l'effet dynamo et le nombre de Reynolds magnétique en étudiant la création de champs magnétiques induits lorsqu'une particule de fluide chargée électriquement est en mouvement. La troisième sous-partie présente la dynamo de Bullard, un système expérimental modèle tentant de reproduire certaines caractéristiques du champ géomagnétique. On établit le système d'équations différentielles couplant le mouvement mécanique de la dynamo et le champ magnétique induit. On discute ensuite les caractéristiques du champ magnétique terrestre reproduites par ce modèle expérimental. La dernière sous-partie est consacrée à la discussion du document de l'annexe 2 qui présente un autre modèle expérimental de l'effet dynamo, l'expérience VKS2.
- La dernière partie est consacrée à l'équation fondamentale de la magnétohydrodynamique. Les équations de Maxwell dans un milieu conducteur, la loi d'Ohm locale ainsi que la loi de conservation de la charge électrique sont utilisées pour obtenir l'équation d'évolution du champ magnétique, ou équation d'induction, dans un fluide en mouvement. On réalise ensuite une interprétation énergétique de l'équation d'induction et on discute du cas limite de diffusion. On termine en introduisant un nombre caractéristique de l'induction magnétique dans un fluide conducteur qui fait écho au nombre de Reynolds magnétique introduit dans la partie précédente.

C'est un sujet long et presque exclusivement consacré à l'électromagnétisme, ce qui peut être déstabilisant. Le thème est attractif et correspond à une thématique de recherche actuelle et complexe. L'ensemble est peu calculatoire, à l'exception de la dernière partie, et de nombreuses questions exigent un traitement qualitatif du problème.

## INDICATIONS

### Partie I

- I.A  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur. Pour trouver la direction du champ au point M, il faut trouver des plans de symétrie de la distribution de courant auxquels appartient M.
- I.C.2 Les points d'inflexion sont des points pour lesquels la dérivé première présente un extremum, c'est-à-dire que la dérivé seconde de la fonction s'anule.
- I.E Appliquer le théorème du moment cinétique à l'aiguille écartée d'un petit angle  $\theta$  de l'axe d'équilibre.

### Partie II

- II.A.2.b Découper la boule en spires élémentaires puis sommer les moments magnétiques élémentaires.
- II.A.2.c Dans le cadre de ce modèle, qu'est-ce qui peut provoquer des changements de sens du champ magnétique ?
- II.B.2.b La dimension d'un rotationnel est l'inverse d'une longueur.
- II.B.3.b Une infinité de champs induits est générée. Il faut donc sommer ces champs.
- II.C.3.a Calculer le flux du champ magnétique uniforme  $\vec{B}_1$  sur le disque puis utiliser la loi d'Ohm électrique.
- II.C.5 Appliquer la loi des mailles au circuit équivalent.
- II.C.7 Utiliser le théorème du moment cinétique et un couplage électromécanique parfait entre le disque et le circuit.
- II.C.9 Multiplier, respectivement par  $\Omega$  et  $i$ , les première et deuxième lignes de l'équation II.6 donnée dans l'énoncé pour faire apparaître des termes quadratiques en  $\Omega$  et en  $i$ .

### Partie III

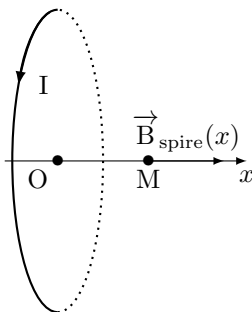
- III.B.1 Utiliser la loi d'Ohm locale puis la loi de Maxwell-Gauss.
- III.B.2 Comparer le temps caractéristique de l'évolution de la densité de charge à un temps caractéristique de l'expérience comme la période de rotation des turbines par exemple.
- III.D Appliquer le rotationnel à l'équation de Maxwell-Ampère.
- III.E Multiplier l'équation d'induction par  $\vec{B}/\mu_0$ .
- III.G Comparer l'expression trouvée au nombre de Reynolds magnétique introduit dans l'annexe 2.

## L'EFFET DYNAMO, ORIGINE DU CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE ?

### I. UNE MESURE DU CHAMP GÉOMAGNÉTIQUE

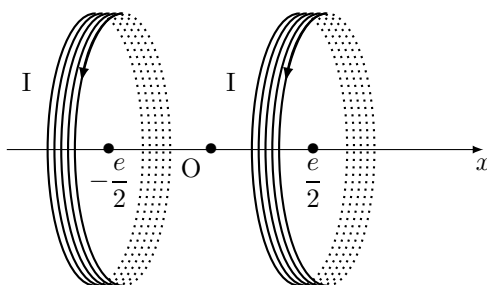
**I.A** Tout plan orthogonal au plan de la spire et contenant le point M est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Comme le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{spire}}$  est un pseudo-vecteur,  $\vec{B}_{\text{spire}}$  appartient à l'intersection de tous ces plans et est donc dirigé selon le vecteur  $\vec{u}_x$ . Par ailleurs, comme la spire est orientée positivement par rapport à  $\vec{u}_x$  (en suivant la règle de la main droite),  $\vec{B}_{\text{spire}}$  est selon  $+\vec{u}_x$ . Finalement,

$$\vec{B}_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left( 1 + \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{u}_x$$



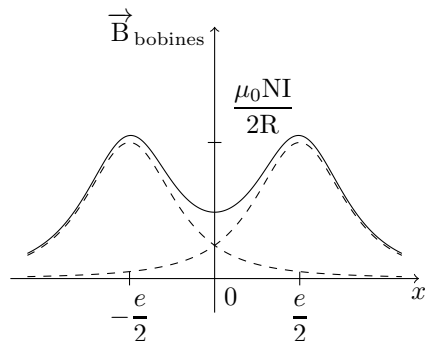
**I.B** Par translation du centre de chaque bobine de  $\pm e/2 \vec{e}_x$  et par linéarité des équations de Maxwell, le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{bobines}}(x)$  créé en un point M d'abscisse  $x$  de l'axe commun aux deux bobines est

$$\vec{B}_{\text{bobines}}(x) = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left[ \left( 1 + \left( \frac{x - e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( 1 + \left( \frac{x + e/2}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x$$

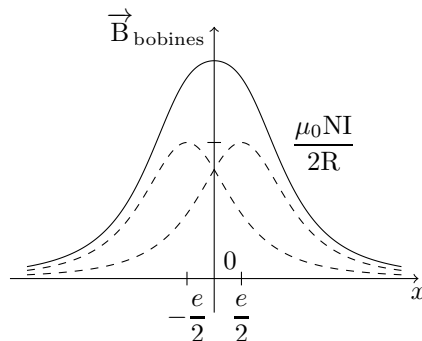


┆ Ces deux bobines constituent un dispositif de « bobines de Helmholtz ».

**I.C.1** Dans le cas où la séparation  $e$  entre les deux bobines est supérieure à la distance critique  $e_0$ , le champ magnétique total présente deux maxima distincts autour de  $x = -e/2$  et  $x = e/2$  ainsi qu'un minimum local en  $x = 0$ .



$e > e_0$



$e < e_0$

Dans l'autre cas, lorsque la séparation entre les deux bobines est inférieure à la distance critique  $e_0$ , le champ magnétique total ne présente plus qu'un maximum en  $x = 0$ .

En passant d'un minimum local à un maximum local en  $x = 0$  lorsque la séparation entre les bobines diminue, on passe par un cas critique où la courbe est plate : le champ magnétique est alors localement uniforme entre les deux bobines. **Pour  $e = e_0$ , le champ magnétique est localement uniforme entre les deux bobines.**

Lorsque les courants dans les deux bobines ont des sens opposés (dispositif « anti-Helmholtz »), le champ magnétique autour du centre du dispositif a une dépendance linéaire en  $x$ . On obtient un piège magnétique qui a notamment permis certaines des premières expériences de piègeages d'atomes au milieu des années 1980.

**I.C.2** La fonction  $B_{\text{spire}}$  est paire et présente un maximum en  $x = 0$ . Comme la dérivée d'une fonction paire est impaire, on sait que la dérivée  $B'_{\text{spire}}$  de  $B_{\text{spire}}$  est telle que, pour tout  $x$ ,

$$B'_{\text{spire}}(x) = -B'_{\text{spire}}(-x)$$

De plus, la dérivée seconde  $B''_{\text{spire}}$  de  $B_{\text{spire}}$  est paire.  $B''_{\text{spire}}$  s'annule en deux points symétriques qui correspondent aux pentes minimales et maximales de la courbe représentative de  $B_{\text{spire}}$ . On pose  $e_0$  la distance telle que pour  $e = e_0$ ,  $B''_{\text{spire}}$  s'annule en  $x = \pm e_0/2$ . On a donc

$$B''_{\text{spire}}(-e_0/2) = B''_{\text{spire}}(e_0/2) = 0$$

Par ailleurs, la dérivée troisième  $B'''_{\text{spire}}$  de  $B_{\text{spire}}$  est impaire. On considère donc deux bobines placées en  $x = -e_0/2$  et  $x = e_0/2$  qui produisent respectivement un champ  $B_{-e_0/2}$  et  $B_{e_0/2}$ . Le développement limité à l'ordre 3 de ces deux champs autour de zéro s'écrit

$$\begin{cases} B_{-e_0/2}(\varepsilon) = B_{-e_0/2}(0) + B'_{-e_0/2}(0)\varepsilon + B''_{-e_0/2}(0)\frac{\varepsilon^2}{2} + B'''_{-e_0/2}(0)\frac{\varepsilon^3}{6} + O(\varepsilon^4) \\ B_{e_0/2}(\varepsilon) = B_{e_0/2}(0) + B'_{e_0/2}(0)\varepsilon + B''_{e_0/2}(0)\frac{\varepsilon^2}{2} + B'''_{e_0/2}(0)\frac{\varepsilon^3}{6} + O(\varepsilon^4) \end{cases}$$

avec  $B'_{-e_0/2}(0) = -B'_{e_0/2}(0)$ ,  $B'''_{-e_0/2}(0) = -B'''_{e_0/2}(0)$  et  $B''_{e_0/2}(0) = B''_{-e_0/2}(0) = 0$ . Le champ résultant d'un dispositif de Helmholtz,  $B_{\text{bobines}}(\varepsilon) = B_{e_0/2}(\varepsilon) + B_{-e_0/2}(\varepsilon)$  vaut donc

$$B_{\text{bobines}}(\varepsilon) = B_{e_0/2}(0) + B_{-e_0/2}(0) + O(\varepsilon^4)$$

La fonction  $B_{\text{bobines}}$  est donc constante à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour une séparation particulière  $e = e_0$ .

**I.D** On applique le théorème du moment cinétique à l'aiguille aimantée dans le référentiel galiléen terrestre. En supposant que la liaison pivot selon  $z$  est parfaite, l'aiguille aimantée n'est soumise qu'au couple magnétique  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ . On a

$$J\dot{\theta}\vec{u}_z = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

L'aiguille magnétique occupe une position d'équilibre lorsque  $\vec{M} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ . Les positions d'équilibre sont donc telles que  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires. Considérons que

