

## Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Fabrice Maquère (Professeur agrégé) ; il a été relu par Cyril Jean (ENS Ulm), Christelle Serba (Docteur en chimie), Alexandre Héroult (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet évoque différents aspects du projet Hyperloop. Il s'agit d'une proposition de transport terrestre à très haute vitesse dans des capsules propulsées par un moteur à induction, voyageant sur coussin d'air dans des tubes à pression réduite. Le sujet est constitué de trois parties dont chacune détaille une particularité du projet.

- La première partie s'intéresse aux propriétés thermodynamiques de l'air contenu dans les tubes de guidage. Elle commence par l'étude d'une pompe à palette, utilisée pour créer et maintenir un vide partiel dans le tube dans lequel circulent les capsules ; on modélise son fonctionnement par une série de transformations isothermes d'un gaz parfait, d'abord dans un modèle idéal puis en considérant l'existence de fuites. Dans un second temps, le sujet se penche sur le comportement de l'air au voisinage du véhicule. Enfin, la question du refroidissement de celui-ci au moyen d'un échangeur à deux fluides est abordée dans les dernières questions. Cette partie fait appel à une proportion assez large du programme de thermodynamique ; la difficulté des questions est progressive.
- La deuxième partie porte sur des thématiques liées à la chimie et s'intéresse à l'alimentation électrique du compresseur. Elle commence par l'étude de l'élément lithium (atomistique, cristallographie) puis se poursuit par des questions sur les deux électrodes utilisées dans un accumulateur au lithium (oxydoréduction, bilan énergétique d'une pile). À la fin de la partie est abordé le choix de l'électrolyte (détermination d'une enthalpie de réaction et de la conductivité de cet électrolyte). Cette partie est globalement facile.
- La troisième partie étudie le moteur à induction responsable de la propulsion des capsules. Le champ magnétique nécessaire au fonctionnement du moteur est produit par des paires de bobines, modélisées par des solénoïdes infinis. Le champ généré par ces bobines n'est exploitable pour la propulsion du véhicule que s'il forme globalement une onde progressive se propageant vers l'avant. On considère pour cela le champ produit par une succession de trois paires de bobines alimentées par du courant triphasé. Les dernières questions de cette partie sont relatives à la force de Laplace, subie par la capsule, qui découle de ce champ. Mêlant les chapitres sur l'induction et sur les ondes progressives, cette partie est d'un niveau plutôt basique mais une ou deux questions se révèlent assez calculatoires.

Ce sujet analyse un projet réel, dont on pourra trouver une description plus complète en suivant les références fournies en bas de page dans l'énoncé. La capacité à calculer des ordres de grandeur pour juger de la faisabilité d'une idée est une aptitude essentielle pour des ingénieurs et à ce titre, ce sujet est bien ciblé. Proposant par ailleurs des questions de difficulté variable, il est accessible à tout le monde.

## INDICATIONS

### Partie I

- I.A.1.a Appliquer l'équation des gaz parfaits au système composé du gaz dans le réservoir et dans la pompe.
- I.B.2 Reprendre le résultat de la question I.A.1.b et effectuer un développement limité.
- I.C.8.b La variation d'enthalpie de l'eau est la somme de deux termes décrivant des processus de nature différente.

### Partie II

- II.A.5 Un élément de très faible électronégativité a tendance à ne pas retenir un de ses électrons.
- II.A.6 Pour calculer la compacité, il faut regarder où sont tangents les atomes entre eux et relier ainsi  $R_{Li}$  et  $a$ .
- II.A.8 Comparer la masse volumique du lithium à celle d'autres métaux usuels.
- II.B.1.a.ii Les nombres stœchiométriques dans une équation de réaction ne sont pas forcément des nombres entiers. Le nombre décimal  $x$  peut être utilisé.
- II.B.4.a 1 W.h est l'énergie fournie, pour une puissance de 1 W, pendant une heure.
- II.C.1.a Écrire les demi-équations électroniques en milieu acide puis ajuster l'équation finale pour qu'elle corresponde à un milieu basique.
- II.C.1.c Il faut s'intéresser à la thermodynamique de la réaction du lithium sur l'eau, ainsi qu'aux produits formés.
- II.C.2 Une estimation à un chiffre significatif de la conductivité de l'électrolyte suffit.

### Partie III

- III.A.2.b Utiliser la première formule trigonométrique du formulaire à la fin du sujet.
- III.A.3 Développer chacun des produits de sinusoides, remarquer que la somme de trois des termes obtenus est nulle, puis regrouper les termes restants.
- III.B.1 Ne pas oublier que la spire est en mouvement.
- III.B.4 Considérer la valeur de la force de Laplace sur chacun des côtés de la spire carrée.
- III.B.6 Quel est le seul moyen pour orienter la force de Laplace dans l'autre sens ?

## LE PROJET HYPERLOOP

### I. L'AIR DANS LE TUBE

**I.A.1.a** Le réservoir à vider, de volume  $V_0$  et de pression initiale  $P_0$ , contient, d'après la loi des gaz parfaits, une quantité de matière de gaz  $n_0$  donnée par

$$P_0 V_0 = n_0 RT$$

La pression que l'on cherche est celle du réservoir au moment où l'orifice d'aspiration se ferme. Or si l'on suppose que l'équilibre hydrostatique a le temps de s'établir pendant une rotation de la pompe, cette pression est aussi celle qui existe dans le volume constitué du réservoir et de la pompe pendant la phase d'aspiration. Comme il s'agit de la même quantité de matière de gaz et qu'on suppose une évolution isotherme, on peut aussi appliquer l'équation des gaz parfaits au volume constitué de l'union du réservoir et de la pompe, soit

$$P_1 (V_0 + V_b) = n_0 RT = P_0 V_0$$

d'où

$$P_1 = P_0 \frac{V_0}{V_0 + V_b}$$

**I.A.1.b** Pour le second cycle, les calculs sont identiques mais la pression initiale dans le réservoir est cette fois  $P_1$  au lieu de  $P_0$ . Il suffit donc de la remplacer dans le résultat de la question précédente :

$$P_2 = P_1 \frac{V_0}{V_0 + V_b} = P_0 \left( \frac{V_0}{V_0 + V_b} \right)^2$$

Selon le même principe, on observe que pour tout  $k \geq 1$ ,

$$P_k = P_{k-1} \frac{V_0}{V_0 + V_b}$$

d'où

$$P_k = P_0 \left( \frac{V_0}{V_0 + V_b} \right)^k$$

**I.A.1.c** La pression dans le réservoir diminue d'un facteur constant  $\frac{V_0}{V_0 + V_b} < 1$  à chaque cycle,  **$P_{\min}$  est donc la limite de la suite géométrique  $P_k$ , soit 0.**

**I.A.1.d** Le volume d'air aspiré à la pression du réservoir pendant un cycle de la pompe est  $V_b$ , que l'on multiplie par  $\nu$ , le nombre de cycles par seconde, pour obtenir le débit, d'où

$$D = \nu V_b$$

**I.A.2.a** La valeur du débit trouvée à la question précédente ne dépend que des caractéristiques de la pompe et pas de la pression du réservoir. La courbe représentant  $D$  en fonction de  $P$  devrait donc être une droite horizontale, ce que l'on observe à peu de choses près entre 2 mbar et 1 bar. À des pressions inférieures à 2 mbar, le débit volumique réel de la pompe s'effondre. Cela peut être expliqué en partie par le fait que  $V_b$  n'est jamais totalement vide, il contient donc du gaz résiduel à une faible pression qui est réintroduit dans le réservoir à chaque cycle. Ce processus devenant de moins en moins négligeable à mesure que la pression du réservoir diminue, le débit d'extraction est réduit en conséquence.

**I.A.2.b** Comme à la première question, on peut appliquer la loi des gaz parfaits à la quantité d'air contenue dans le réservoir à la fin du cycle précédent :

$$P_k V_0 = n_k RT$$

De l'air s'introduit dans le réservoir pendant la phase d'aspiration, soit

$$P_{k+1}(V_0 + V_b) = n_{k+1}RT$$

où  $n_{k+1} = n_k + n_f$ ,  $n_f$  étant la quantité d'air introduite et obéissant à l'équation  $P_0 V_f = n_f RT$ . Par conséquent,

$$P_{k+1}(V_0 + V_b) = P_k V_0 + P_0 V_f$$

d'où 
$$P_{k+1} = P_k \frac{V_0}{V_0 + V_b} + P_0 \frac{V_f}{V_0 + V_b}$$

Cette équation montre que la pompe ne produit qu'un vide partiel dans le réservoir, du fait du terme constant dans l'expression de la pression. Cela explique la chute du débit volumique d'aspiration que l'on observe lorsque la pression dans le réservoir diminue en-dessous d'un certain seuil.

**I.A.2.c** Sans chercher une expression explicite de  $P_k$  pour toutes les valeurs de  $k$ , on se contente d'une recherche de point fixe pour en déterminer la limite quand  $k$  tend vers l'infini :

$$P'_{\min} = P'_{\min} \frac{V_0}{V_0 + V_b} + P_0 \frac{V_f}{V_0 + V_b}$$

soit 
$$P'_{\min} V_b = P_0 V_f$$

d'où 
$$\boxed{P'_{\min} = P_0 \frac{V_f}{V_b}}$$

L'énoncé n'est pas très clair sur la manière dont l'air est réintroduit à l'intérieur du réservoir : selon le modèle de fuite que l'on choisit, on peut obtenir des résultats légèrement différents pour  $P'_{\min}$ . Par exemple, si l'on considère que le volume d'air qui fuit provient d'une cavité dans la pompe et s'ajoute alors à ceux du réservoir et de la pompe lors du cycle d'aspiration, alors  $P'_{\min} = P_0 \frac{V_f}{V_b + V_f}$ . Ces différences ne sont pas fondamentales et ne changent pas l'interprétation physique des résultats.

**I.A.2.d** Les causes potentielles de la réintroduction d'air dans le réservoir sont multiples : fuite dans le réservoir lui-même, mauvaise adhérence des palettes de la pompe au stator de celle-ci, ou encore existence d'une petite cavité d'air dans la pompe qui n'est pas balayée par les palettes, et qui a pour conséquence la présence d'une quantité d'air résiduelle.

**I.A.2.e** Soit  $P$  la pression du réservoir. Le volume d'air extrait lors d'un cycle est toujours  $V_b$ , mais ce débit est diminué par la quantité d'air qui fuit vers l'intérieur du réservoir, soit un volume  $V_f$  à la pression  $P_0$ , ce qui correspond à un volume  $V_f P_0 / P$  à la pression  $P$ . En fin de compte, le volume net extrait à chaque cycle est  $V_b - V_f \frac{P_0}{P}$ . Le débit volumique total est donc

$$\boxed{D = \nu \left( V_b - V_f \frac{P_0}{P} \right)}$$