e3a Maths 2 PSI 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Matthias Moreno (ENS Lyon) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Ce problème, divisé en quatre parties très liées, traite d'algèbre bilinéaire euclidienne. Il s'intéresse en particulier à l'ensemble $\mathrm{T(E)}$ des endomorphismes u symétriques de rang inférieur ou égal à 1 vérifiant

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (u(x) \mid x) \geqslant 0$$

- La partie préliminaire démontre quelques résultats préalables, certains n'ayant rien à voir avec la suite (question 3) mais permettant simplement d'identifier les candidats à l'aise avec le sujet ; d'autres résultats sont largement réutilisés dans la suite, comme la question 4 dans laquelle on montre que l'application

$$\begin{cases} \mathscr{S}(\mathrm{E})^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (f,g) \longmapsto < f,g >= \mathbf{tr}(f \circ g) \end{cases}$$

  est un produit scalaire. À part la question 1 qui requiert un peu d'intuition, c'est une partie proche du cours et facile si l'on a bien compris l'algèbre linéaire.
- La partie 1 propose une caractérisation des endomorphismes de $\mathrm{T(E)}$. Tout endomorphisme v de $\mathrm{T(E)}$ peut s'écrire $v = u_a$ avec $a \in \mathrm{E}$, où u_a est l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad u_a(x) = (x \mid a)a$$

  Malgré quelques difficultés techniques, cette partie reste abordable.
- La partie 2 définit, pour un endomorphisme symétrique f de E fixé, l'application $\Phi : x \in \mathrm{E} \longmapsto [\mathrm{N}(f - u_x)]^2$. Elle étudie alors la valeur de $m(f) = \operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}} \Phi(x)$ en utilisant la fonction intermédiaire, définie pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E de norme 1, $h_x : t \in \mathbb{R} \longmapsto \Phi(x + ty)$. Notons que $m(f)$ est la distance de f à l'espace $\mathrm{T(E)}$. C'est sans doute la partie la plus difficile du problème, où la multiplicité des fonctions définies peut dérouter.
- Enfin, la partie 3 applique les résultats de la partie 2 dans certains cas particuliers : tout d'abord les matrices stochastiques (c'est-à-dire celles dont les coefficients sont positifs et telles que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1) et ensuite deux exemples de matrices simples. Il faut avoir bien compris les résultats obtenus dans la partie 2 avant de pouvoir les appliquer dans cette partie.

Ce problème est d'un niveau élevé pour le concours E3A, en grande partie parce que certaines questions (par exemple I.2.2 , II.3 , II.5 , II.6) sont ouvertes et réutilisées dans la suite, ce qui les rend bloquantes pour tout candidat ne les ayant pas résolues. Il offre une occasion de faire le point sur l'algèbre euclidienne et de s'entraîner à suivre le déroulement d'un énoncé complexe.

Indications

1 Montrer que l'ensemble $\mathrm{T(E)}$ n'est pas stable par combinaisons linéaires en considérant par exemple l'application u définie par $u(e_1) = e_1$ et $u(e_i) = 0$ pour tout $i \neq 1$, où $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale pour le produit scalaire défini dans l'énoncé.

3 Pour l'assertion (3), se ramener à la précédente. Pour les assertions (4) et (5), utiliser le théorème du rang.

4 Un produit scalaire est une application bilinéaire symétrique définie positive.

5 Comme la somme de chaque ligne de A vaut -3, on sait que -3 est valeur propre de A, associée au vecteur propre ${}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. On peut déterminer les deux autres valeurs propres en utilisant les relations entre leur somme et la trace de A, ainsi que leur produit et le déterminant de A.

I.2.3 Décomposer $f(a)$ dans la base $\mathscr{B}$: $f(a) = \dfrac{(f(a) \mid a)}{\|a\|^2}a + b$, avec $b \in (\mathrm{Vect}\,(a))^\perp$.

I.3.1 Exploiter le fait que u est de rang inférieur ou égal à 1 pour en déduire que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\,(b)$.

I.3.2 Pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha\, b$. Conclure en prenant le produit scalaire des deux membres de cette égalité avec b.

I.3.4 D'après la question I.3.2 , le vecteur a cherché est un multiple de b.

I.4 Montrer que $u_{-a} = u_a$ pour tout $a \in \mathrm{E}$.

II.3 Utiliser l'égalité de la question II.2 : développer chaque terme en utilisant l'égalité $\|y\| = 1$ et les (bi)linéarités et symétries des applications en jeu.

II.5 D'après la question 2.3 des préliminaires, la trace de $f \circ f$ est égale à la trace de la matrice représentative de $f \circ f$ dans une base bien choisie.

II.6 Si $z \in \mathrm{E}$ est de norme 1, il existe $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $z = z_1 e_1 + \cdots + z_p e_p$ avec ${z_1}^2 + \cdots + {z_p}^2 = 1$. Développer alors le produit $(z \mid f(z))$.

II.7.1 La fonction h_a est minimale en 0.

II.7.2 Calculer $h'_a(0)$ avec l'expression trouvée à la question II.3 .

II.7.3 Utiliser à nouveau l'expression de la question II.3 .

II.9.1 Montrer que les conditions de la question II.7.4 sont satisfaites pour le vecteur $a = \sqrt{\lambda_p} e_p$. Exploiter ensuite les résultats des questions II.7.3 et II.5 .

II.9.2 Pour le sens direct, la question II.7.2 montre que x est un vecteur propre de f. La valeur propre associée est λ_p par maximalité.

III.1.3 Utiliser les conditions de la question II.2.2 .

III.2 Comme B est de rang 1, 0 est valeur propre de B de multiplicité $p-1$. L'autre valeur propre est déterminée comme dans la question 5 des préliminaires. La valeur de $m(f_\mathrm{B})$ est donnée dans la question II.9.1 .

III.3.1 Remarquer que $\mathrm{C} = \mathrm{B} - \mathrm{I}_p$.

III.3.3 Chercher un vecteur satisfaisant aux conditions de la question II.9.2 .

III.3.4 Si $w \in \mathrm{T(E)}$ est un autre endomorphisme vérifiant l'égalité, utiliser la surjectivité de l'application φ puis les conditions de la question II.9.2 .

Préliminaires

1 Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale pour le produit scalaire donné dans l'énoncé, et u l'endomorphisme défini par

$$\begin{cases} u(e_1) = e_1 \\ u(e_i) = 0 \quad \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Puisque $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base, on a $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(e_1), \ldots, u(e_p)) = \operatorname{rg}((e_1)) = 1$. En outre, si $x \in \mathrm{E}$, il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (u(x) \mid x) &= \left(\sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i) \middle| \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \right) \\ &= \left(x_1 e_1 \middle| \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_1 x_j \, (e_1 \,| e_j\,) \\ (u(x) \mid x) &= {x_1}^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'appartenance de u à $\mathrm{T}(\mathrm{E})$.

Notons $v = -u$. Alors $v \in \mathscr{S}(\mathrm{E})$ et

$$(v(e_1) \mid e_1) = -(u(e_1) \mid e_1) = -\|e_1\|^2 < 0$$

d'où l'on déduit que $v \notin \mathrm{T}(\mathrm{E})$ puis que $\mathrm{T}(\mathrm{E})$ n'est pas stable par combinaisons linéaires. Finalement,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{T}(\mathrm{E}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

2.1 Si $(i, j) \in \{1, \ldots, p\}^2$,

$$(\mathrm{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{A}_{ik} \mathrm{B}_{kj} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{BA})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{B}_{ik} \mathrm{A}_{kj}$$

d'où
$$\mathbf{tr}(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{p} (\mathrm{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \mathrm{A}_{ik} \mathrm{B}_{ki}$$

et
$$\mathbf{tr}(\mathrm{BA}) = \sum_{i=1}^{p} (\mathrm{BA})_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \mathrm{B}_{ik} \mathrm{A}_{ki} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \mathrm{A}_{ki} \mathrm{B}_{ik}$$

en inversant les deux dernières sommes (ce qui est autorisé puisque les sommes sont finies). En remarquant que les rôles de i et k sont inversés,

$$\boxed{\mathbf{tr}(\mathrm{AB}) = \mathbf{tr}(\mathrm{BA})}$$

2.2 Si B est semblable à A, il existe une matrice P inversible telle que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$. Ainsi,

$$\mathbf{tr}(\mathrm{B}) = \mathbf{tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathbf{tr}[\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP})] = \mathbf{tr}[(\mathrm{AP})\mathrm{P}^{-1}] = \mathbf{tr}(\mathrm{A})$$

d'après la question précédente. En conclusion,

$$\boxed{\mathbf{tr}(\mathrm{B}) = \mathbf{tr}(\mathrm{A})}$$

2.3 Soit u un endomorphisme de E. Si A et B sont deux matrices représentant u dans deux bases différentes, alors A et B sont semblables (théorème du changement de base). On en déduit d'après la question précédente que $\mathbf{tr}(A) = \mathbf{tr}(B)$. On peut donc poser $\mathbf{tr}(u) = \mathbf{tr}(A)$.

$$\boxed{\text{La trace d'un endomorphisme de E est égale à la trace de la matrice représentant } u \text{ dans une base quelconque de E.}}$$

3 Par définition,

$$\boxed{\text{Un hyperplan de l'espace vectoriel E de dimension } p \text{ est un sous-espace vectoriel de E de dimension } p-1.}$$

Le complémentaire d'un espace vectoriel n'est jamais un espace vectoriel puisqu'il ne contient pas le vecteur nul. A fortiori, l'espace G ne peut donc pas être le supplémentaire de H.

$$\boxed{\text{L'assertion (1) est fausse.}}$$

Soient $a \in G$ et $x \in H \cap \operatorname{Vect}(a)$. Il existe alors un scalaire $k \in \mathbb{R}$ tel que $x = ka$. Si $k \neq 0$, il vient $a = x/k \in H$, ce qui est impossible puisque $a \in G$ et que G et H sont complémentaires. Par suite, $k = 0$, puis x est le vecteur nul. Ainsi, H et $\operatorname{Vect}(a)$ sont en somme directe. Comme $\dim(H) + \dim(\operatorname{Vect}(a)) = p$, on en déduit qu'ils sont supplémentaires. Par conséquent,

$$\boxed{\text{L'assertion (2) est vraie.}}$$

Si a est un vecteur non nul et orthogonal à H, alors il n'appartient pas à H. Il appartient donc à son complémentaire, c'est-à-dire G. Ainsi, on est ramené à l'assertion précédente, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{L'assertion (3) est vraie.}}$$

L'application $\mathbf{tr}$ est une application non nulle de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, son image est donc de dimension 1, ce qui signifie que son rang vaut 1. D'après le théorème du rang, en notant $\operatorname{Ker}(\mathbf{tr})$ le noyau de cette application, on a l'égalité

$$\dim(\operatorname{Ker}(\mathbf{tr})) = \dim(\mathscr{M}_p(\mathbb{R})) - \operatorname{rg}(\mathbf{tr}) = \dim(\mathscr{M}_p(\mathbb{R})) - 1$$

c'est-à-dire que le noyau de l'application $\mathbf{tr}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{L'assertion (4) est vraie.}}$$

La preuve de l'assertion précédente est vraie quelle que soit l'application considérée : en utilisant le théorème du rang, un endomorphisme de E est de rang 1 si, et seulement si, son noyau est de dimension $p - 1$, c'est-à-dire si et, seulement si, c'est un hyperplan.

$$\boxed{\text{L'assertion (5) est vraie.}}$$

4 Montrons que l'application proposée est un produit scalaire, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive de $\mathscr{S}(E)^2$ dans $\mathbb{R}$.

- Tout d'abord, elle est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$ car la trace l'est aussi.
- Elle est symétrique d'après les questions 2.1 et 2.3 .