Centrale Maths 1 PC 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Damien Garreau (ENS Ulm) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Nicolas Martin (Professeur agrégé).

Ce sujet est consacré à l'étude des sous-espaces stables d'un endomorphisme. Ses cinq parties sont indépendantes.

- La première partie rappelle les liens entre sous-espaces stables et diagonalisabilité. En particulier, on montre que lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, la diagonalisabilité est équivalente à l'existence d'un supplémentaire stable pour tout sous-espace stable.
- Dans la deuxième partie, on montre qu'un sous-espace F de E est stable si et seulement si $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{p}(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_i)$ où les $(\mathrm{E}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont les sous-espaces propres. On utilise ce résultat pour dénombrer les sous-espaces stables dans le cas où $p = n$.
- La troisième partie est consacrée à l'étude des sous-espaces stables d'un endomorphisme nilpotent. Après avoir étudié le cas particulier de l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on montre un résultat général.
- Dans la quatrième partie, on montre que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet au moins une droite ou un plan stable. On détermine ensuite les solutions $(x(t), y(t), z(t))$ d'un système différentiel de taille 3 donné qui représentent une paramétrisation d'une droite ou d'un arc plan de $\mathbb{R}^3$.
- La dernière partie caractérise les endomorphismes diagonalisables dans un cadre euclidien : un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il admet n hyperplans stables d'intersection réduite au vecteur nul.

Les parties de ce problème sont équilibrées et chacune comporte des questions délicates. La progression est linéaire et bien guidée. On se servira utilement de ce sujet pour faire le point sur l'algèbre linéaire.

Indications

Partie I

I.B.1 Penser aux sous-espaces vectoriels triviaux.

I.B.2 Utiliser le noyau et l'image de l'endomorphisme et le théorème du rang pour le dernier cas.

I.C.3 Montrer que c'est une homothétie.

I.D.1 Utiliser le théorème de la base incomplète.

I.D.2 Considérer $\mathrm{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}\,(\lambda)} \mathrm{E}_\lambda$, puis montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Partie II

II.A.3 Reconnaître un déterminant de Vandermonde.

II.A.5 Utiliser la question II.A.3.

II.A.6 Utiliser la question II.A.2.

II.B.2 Utiliser les questions II.B.1, II.A et I.A.

II.B.3 Utiliser la question II.A.

II.B.4 Reconnaître $(1+1)^n$, puis utiliser la formule du binôme.

Partie III

III.A.2.a Considérer une base de F.

III.A.3 Utiliser la question III.A.2.c.

III.B.1 Montrer qu'il s'agit de $\mathrm{E} \setminus \mathrm{Ker}\,(f^{n-1})$.

III.B.3 Multiplier les éléments de $\mathscr{B}_{f,u}$ par des constantes bien choisies.

Partie IV

IV.B Utiliser le fait qu'un polynôme réel de degré impair admet toujours au moins une racine réelle.

IV.C.1 Raisonner par l'absurde en montrant que $\lambda \in \mathbb{R}$.

IV.C.2 Calculer MZ de deux manières différentes, puis identifier les parties réelles et imaginaires.

IV.D Utiliser les questions IV.B et IV.C.

IV.F.1 Calculer les valeurs propres de A et les vecteurs propres associés.

IV.F.2 Utiliser la question IV.F.1.

IV.F.3 Calculer x'', puis faire disparaître les termes en y.

IV.F.4 Effectuer le changement de variable $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$ puis utiliser les questions précédentes.

Partie V

V.A.1 Définir le produit scalaire canonique.

V.A.2 Montrer que $u \cdot v = {}^t\mathrm{U}\,\mathrm{V}$.

V.C Déterminer les vecteurs propres de ${}^t\mathrm{A}$, puis utiliser la question V.B.

V.D Utiliser l'équivalence entre A diagonalisable et ${}^t\mathrm{A}$ diagonalisable.

1. Première partie

I.A Supposons que u soit un vecteur propre de f. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Pour tout $x \in \mathrm{F}$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu u$. Comme

$$f(x) = f(\mu u) = \mu f(u) = \mu\lambda u \in \mathrm{F}$$

$$\boxed{\text{La droite F est stable par } f.}$$

Réciproquement, supposons que F soit stable par f. Soit u un vecteur non nul de F. Par hypothèse, $f(u) \in \mathrm{F}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.

$$\boxed{\text{Le vecteur } u \text{ est propre pour } f.}$$

I.B.1 Comme f est un endomorphisme, il laisse E stable, et $f(0) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le sous-espace nul } \{0\} \text{ et E tout entier sont stables par } f.}$$

L'idée dans $\mathbb{R}^2$ est de trouver une application linéaire qui ne laisse stable aucune droite. Considérons donc la rotation d'angle θ. Cette application est linéaire, et elle envoie une droite sur une droite distincte pourvu que θ ne soit pas congru à 0 modulo π.

I.B.2 Si $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f(f(x)) = f(0) = 0$, autrement dit $\mathrm{Ker}\,(f)$ est stable par f. Puisque f n'est pas injective, $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \{0\}$. Comme f est non nulle, $\mathrm{Ker}\,(f)$ est distinct de E. Ainsi, il existe au moins trois sous-espaces distincts stables par f.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces } \{0\},\ \mathrm{Ker}\,(f) \text{ et E sont stables par } f.}$$

Supposons maintenant que n est impair. Soit $y = f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$. Alors

$$f(y) = f(f(x)) \in \mathrm{Im}\,(f)$$

autrement dit $\mathrm{Im}\,(f)$ est stable par f. Montrons que l'image de f est distincte de $\{0\}$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ et E. Le théorème du rang appliqué à f s'écrit

$$\mathrm{rg}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) = \dim \mathrm{E} = n$$

Comme n est impair, on ne peut avoir $\mathrm{rg}\,(f) = \dim \mathrm{Ker}\,(f)$. Par conséquent, l'image et le noyau de f sont distincts. Vu que f est non nulle, son image n'est pas réduite au vecteur nul. Enfin, f est non injective, d'où $\dim \mathrm{Ker}\,(f) \neq 0$, ce qui implique que $\mathrm{rg}\,(f) \neq n$, et donc l'image de f n'est pas E tout entier. Lorsque n est impair, il existe donc au moins quatre sous-espaces stables distincts.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces } \{0\},\ \mathrm{Ker}\,(f),\ \mathrm{Im}\,(f) \text{ et E sont stables par } f.}$$

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Pour trouver les droites stables de f, cherchons les vecteurs propres de f conformément à la question I.A. Il n'y a qu'une valeur propre $\lambda = 1$, et l'identité $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$ conduit à $x = 0$. En conclusion, f ne possède qu'une seule droite propre, d'équation $x = 0$.

I.C.1 Soient v_1, v_2, ..., v_p des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_p. Montrons que $\mathrm{V} = \mathrm{Vect}\ (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est stable par f. Soit $x \in \mathrm{V}$. Il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i v_i$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i(\lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i x_i) v_i \in \mathrm{V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Tout sous-espace engendré par une famille}\\ \text{de vecteurs propres de } f \text{ est stable par } f.\end{array}}$$

Considérons le sous-espace propre E_λ associé à une valeur propre λ. Par définition, pour tout $x \in \mathrm{E}_\lambda$, on a $f(x) = \lambda x$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } \mathrm{E}_\lambda \text{ est l'homothétie de rapport } \lambda.}$$

I.C.2 Soit E_λ un sous-espace propre de f de dimension au moins égale à 2. D'après la question I.C.1, la restriction de f à E_λ est une homothétie de rapport λ. En particulier, une homothétie laisse les droites stables. Comme $\dim \mathrm{E}_\lambda \geqslant 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E_λ contient une infinité de droites :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ laisse stable une infinité de droites.}}$$

I.C.3 Si tous les sous-espaces de E sont stables par f, alors en particulier toutes les droites de E sont stables par f. D'après la question I.A, tous les vecteurs non nuls de E sont vecteurs propres de f.

> C'est un exercice classique d'en déduire que f est une homothétie.

Pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$, notons λ_x l'élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Fixons $x_0 \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ et montrons que tous les λ_x coïncident avec λ_{x_0}.

- Pour tout x tel que la famille (x, x_0) soit liée, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu x_0$ car $x_0 \neq 0$ donc

  $$f(x) = f(\mu x_0) = \mu\, f(x_0) = \mu \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} x$$

  d'où $\lambda_x = \lambda_{x_0}$ par unicité de λ_x.
- Pour tout x tel que la famille (x, x_0) soit libre,

  $$\begin{array}{lrl} & f(x+x_0) &= \lambda_{x+x_0}(x+x_0) = \lambda_{x+x_0} x + \lambda_{x+x_0} x_0 \\ \text{et} & f(x+x_0) &= f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0} x_0 \\ \text{En soustrayant,} & 0 &= (\lambda_{x+x_0} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0}) x_0 \end{array}$$

  Puisque (x, x_0) est libre, $\lambda_{x+x_0} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+x_0} = \lambda_{x_0}$ d'où $\lambda_x = \lambda_{x_0}$.

Puisque $f(x) = \lambda_{x_0} x$ pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0\}$ et pour $x = 0$,

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est une homothétie.}}$$

I.D.1 Supposons f diagonalisable. Soit $\mathscr{B}_\mathrm{D} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres. Soit F un sous-espace stable de E. Notons p la dimension de F. Si $p = 0$ ou n, il n'y a rien à prouver. Sinon, considérons $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ en une base $\mathscr{B}$ de E avec $n - p$ vecteurs de $\mathscr{B}_\mathrm{D}$. Quitte à réordonner $\mathscr{B}_\mathrm{D}$, on peut supposer qu'il s'agit de $(v_1, v_2, \dots, v_{n-p})$. Considérons $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \dots, v_{n-p})$. C'est un supplémentaire de F puisque $(e_1, \dots, e_p, v_1, \dots, v_{n-p})$ est une base de E, et d'après la question I.C.1 il est stable par f.

$$\boxed{\text{Tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par } f.}$$