X/ENS Informatique B (MP/PC) 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose l'étude de deux algorithmes calculant l'enveloppe convexe d'un nuage de points en position générale dans le plan affine, c'est-à-dire qui ne contient pas trois points distincts alignés. Le calcul d'enveloppe convexe est utilisé dans de nombreux domaines : robotique, traitement d'image, théorie des jeux, vérification formelle... Les parties II et III sont indépendantes.

- La première partie propose d'implémenter deux fonctions préliminaires permettant respectivement de trouver le point le plus bas du nuage et de tester l'orientation d'un triangle, opération cruciale dans la suite.
- La deuxième partie étudie l'algorithme du paquet cadeau, qui consiste à envelopper petit à petit le nuage de points. Cette construction nécessite un temps d'exécution en $\mathrm{O}(nm)$, où n est le nombre de points et m celui de leur enveloppe convexe.
- Enfin, la troisième partie étudie l'algorithme de balayage qui résout le même problème en temps $\mathrm{O}(n \log n)$ grâce à la construction, à l'aide de piles, des enveloppes supérieure et inférieure des n points.

Ce sujet est d'une longueur raisonnable pour une épreuve de deux heures. Il se concentre sur les parties d'algorithmique et de programmation du programme et ne présente aucune difficulté majeure sous réserve de maîtriser les rudiments du langage de programmation choisi.

Indications

Partie II

4 Dans la propriété d'antisymétrie, il s'agit en fait de montrer que si $p_j \preceq p_k$ et $p_k \preceq p_j$ alors $p_j = p_k$: la conclusion $j = k$ vient alors du fait que le nuage P est un ensemble qui ne contient donc pas deux occurrences du même point. Pour prouver la propriété de transitivité, utiliser le fait que p_i appartient à l'enveloppe convexe, de sorte que tous les autres points sont inclus dans un demi-plan contenant p_i.

7 Utiliser les fonctions des questions 1 et 5. Pour ajouter un élément `j` à une liste `liste`, utiliser la commande `liste.append(j)`.

Partie III

10 Commencer par écrire une fonction auxiliaire renvoyant la paire (j, k) des dernier et avant-dernier éléments de la pile, en supprimant au passage le sommet de la pile. Utiliser alors une boucle `while` qui applique la fonction auxiliaire précédente et teste l'orientation du triangle (p_i, p_j, p_k), tant que celle-ci est négative.

11 Se convaincre que seul le test d'orientation doit être modifié par rapport à la question précédente.

12 Une fois obtenues les piles `es` et `ei` contenant les enveloppes supérieure et inférieure respectivement, il s'agit d'insérer à l'envers le contenu de `es` duquel on a retiré les premier et dernier éléments à la pile `ei` (pour éviter les doublons).

13 Borner le nombre de fois où chaque indice peut être inséré ou supprimé définitivement des deux piles `es` et `ei`, puis majorer le nombre total de tests d'orientation effectués le long de l'exécution de `convGraham`.

I. Préliminaires

1 Initialisons un indice `j` à 0, ayant vertu à contenir l'indice du point de plus petite ordonnée. À l'aide d'une boucle `for`, testons chaque point afin de mettre à jour `j` si nécessaire, à savoir si le point courant a une ordonnée strictement inférieure, ou bien une même ordonnée mais une abscisse strictement inférieure.

```
def plusBas(tab,n):
    j = 0
    for i in range(1,n):
        if (tab[1][i] < tab[1][j] or
            (tab[1][i] == tab[1][j] and tab[0][i] < tab[0][j])):
            j = i
    return j
```

2 Pour $i = 0$, $j = 3$, $k = 4$, le tableau de l'énoncé apporte les coordonnées suivantes : le point p_0 a pour coordonnées $(0, 0)$, le point p_3 a pour coordonnées $(4, 1)$ et le point p_4 a pour coordonnées $(4, 4)$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{p_0p_3}$ et $\overrightarrow{p_0p_4}$ ont pour coordonnées respectives $(4, 1)$ et $(4, 4)$. L'aire signée du triangle (p_0, p_3, p_4) est donc

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{16-4}{2} = 6 > 0$$

de sorte que le triangle (p_0, p_3, p_4) est orienté positivement.

$$\boxed{\text{Le résultat du test d'orientation sur } (p_0, p_3, p_4) \text{ est } +1.}$$

De même, pour $i = 8$, $j = 9$, $k = 10$, le point p_8 a pour coordonnées $(7, 2)$, le point p_9 a pour coordonnées $(8, 5)$ et le point p_{10} a pour coordonnées $(11, 6)$. Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{p_8p_9}$ et $\overrightarrow{p_8p_{10}}$ ont pour coordonnées respectives $(1, 3)$ et $(4, 4)$. L'aire signée du triangle (p_8, p_9, p_{10}) est ainsi

$$\frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{4-12}{2} = -4 < 0$$

ce qui implique que le triangle (p_8, p_9, p_{10}) est orienté négativement.

$$\boxed{\text{Le résultat du test d'orientation sur } (p_8, p_9, p_{10}) \text{ est } -1.}$$

3 La fonction `orient` calcule le déterminant utilisé dans l'aire signée du triangle (p_i, p_j, p_k) et teste son signe. En particulier, le déterminant est nul si et seulement si deux des trois points au moins sont confondus, auquel cas le résultat du test d'orientation est 0.

```
def orient(tab,i,j,k):
    pi_pj = [tab[0][j]-tab[0][i], tab[1][j]-tab[1][i]]
    pi_pk = [tab[0][k]-tab[0][i], tab[1][k]-tab[1][i]]
    det = pi_pj[0] * pi_pk[1] - pi_pj[1] * pi_pk[0]
    if det > 0:
        return 1
    elif det < 0:
        return -1
    else:
        return 0
```

II. Algorithme du paquet cadeau

$\boxed{4}$ Pour la réflexivité, notons que pour tout $j \neq i$, $\texttt{orient}(\texttt{tab}, i, j, j) = 0$ puisque deux des points sont égaux, de sorte que $p_j \preceq p_j$.

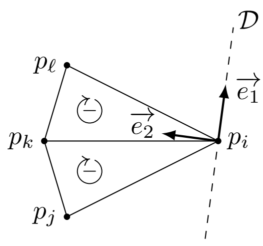
Pour l'antisymétrie, supposons fixés j et k tels que $p_j, p_k \in \mathrm{P} \smallsetminus \{p_i\}$, $p_j \preceq p_k$ et $p_k \preceq p_j$. Par définition,

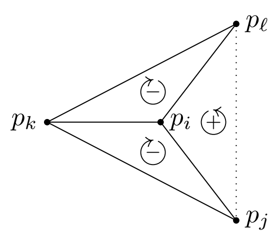
$$\det(\overrightarrow{p_ip_j}, \overrightarrow{p_ip_k}) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \det(\overrightarrow{p_ip_k}, \overrightarrow{p_ip_j}) \leqslant 0$$

Puisque ces deux déterminants sont opposés l'un de l'autre, ils sont nuls, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{p_ip_j}$ et $\overrightarrow{p_ip_k}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que p_i, p_j et p_k sont alignés. Grâce à l'hypothèse de position générale et le fait que p_j et p_k sont distincts de p_i, cela montre que $p_j = p_k$.

> Une coquille s'est glissée dans l'énoncé : la propriété d'antisymétrie consiste à montrer a priori que $p_j \preceq p_k$ et $p_k \preceq p_j$ implique $p_j = p_k$, et non $j = k$. On peut cependant conclure que $j = k$ puisque le nuage P est un ensemble qui ne contient donc pas deux occurrences du même point.

Montrons la transitivité $\preceq$. Pour cela, fixons j, k, ℓ tels que $p_j, p_k, p_\ell \in \mathrm{P} \smallsetminus \{p_i\}$, $p_j \preceq p_k$ et $p_k \preceq p_\ell$. Supposons également que le point p_i appartient à l'enveloppe convexe de P, de sorte que les points p_j, p_k et p_ℓ sont tous dans un demi-plan dont la frontière $\mathcal{D}$ contient p_i (et aucun des trois autres points grâce à l'hypothèse de position générale), comme représenté dans la figure de gauche ci-dessous.





> La figure de droite ci-dessus montre que la propriété de transitivité est fausse si p_i n'est pas sur l'enveloppe convexe de P, puisque (p_i, p_j, p_k) et (p_i, p_k, p_ℓ) sont orientés négativement, mais que (p_i, p_j, p_ℓ) est orienté positivement.

Munissons le plan affine d'un repère orthonormé direct $(p_i, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{e_2}$ orienté vers le demi-plan contenant les points p_j, p_k et p_ℓ. Dans le plan complexe associé, les arguments principaux respectifs θ_j, θ_k et θ_ℓ des points p_j, p_k et p_ℓ appartiennent à $[\,0\,;\pi\,]$. L'interprétation géométrique du déterminant de deux vecteurs dans le plan euclidien assure que

$$\|\overrightarrow{p_ip_j}\| \times \|\overrightarrow{p_ip_k}\| \times \sin(\theta_k - \theta_j) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{p_ip_k}\| \times \|\overrightarrow{p_ip_\ell}\| \times \sin(\theta_\ell - \theta_k) \leqslant 0$$

Puisque $\theta_k - \theta_j$ et $\theta_\ell - \theta_k$ appartiennent à $[\,-\pi\,;\pi\,]$, le fait que le sinus de ces angles soit négatif implique que $\theta_k - \theta_j$ et $\theta_\ell - \theta_k$ appartiennent en fait à $[\,-\pi\,;0\,]$. Par somme, $\theta_\ell - \theta_j \in [\,-2\pi\,;0\,]$. Comme cet angle est par ailleurs inclus dans $[\,-\pi\,;\pi\,]$, on en déduit que $\theta_\ell - \theta_j \in [\,-\pi\,;0\,]$, de sorte que $\sin(\theta_\ell - \theta_j) \leqslant 0$. Finalement,

$$\det(\overrightarrow{p_ip_j}, \overrightarrow{p_ip_\ell}) = \|\overrightarrow{p_ip_j}\| \times \|\overrightarrow{p_ip_\ell}\| \times \sin(\theta_\ell - \theta_j) \leqslant 0$$

ce qui prouve que $p_j \preceq p_\ell$.

> Voici une autre preuve utilisant la bilinéarité du déterminant. Les hypothèses d'orientation négative impliquent que