Mines Physique 2 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Ce sujet, composé de trois parties indépendantes, porte sur le magnétisme.

- Dans la première partie, on énonce rapidement les formules de base de l'électrostatique et de la magnétostatique telles que la force de Coulomb et la loi de Biot et Savart.
- La deuxième partie s'intéresse à la méthode de la « boussole des tangentes » pour étudier la déviation d'une boussole placée dans un champ qui est la superposition du champ magnétique terrestre et de celui créé par un fil infini. On commence par calculer le champ magnétique d'un fil infini puis on introduit le moment magnétique de la boussole. Ensuite, le calcul du couple subi par l'aiguille aimantée permet d'étudier la rotation de la boussole grâce au théorème du moment cinétique. Cette partie permet de réviser les calculs de base de magnétostatique ainsi que les calculs de couple magnétique.
- L'étude d'un dispositif de lévitation magnétique est abordée dans la troisième et dernière partie. On commence par faire une étude mécanique d'un anneau lesté, puis on calcule le champ magnétique créé par la couronne circulaire et on étudie la stabilité de cette lévitation. Enfin, on termine par quelques questions sur un dispositif électrique de stabilisation. Cette partie requiert des raisonnements énergétiques ainsi que ceux habituels sur les amplificateurs opérationnels.

L'épreuve fait appel à de nombreux outils relatifs au magnétisme : calcul de champ magnétique, notion de moment magnétique, expression de l'énergie potentielle et du couple subi dans un champ magnétique extérieur. Cette épreuve alterne des questions difficiles (calcul du couple subi par la boussole), qui demandent une bonne vision du phénomène, et d'autres proches du cours (calcul de champ, amplificateur opérationnel). Peu de résultats intermédiaires sont donnés ; toutefois, le sujet comporte suffisamment de passages indépendants pour qu'il soit toujours possible de progresser.

Attention, les questions portant sur la mécanique du solide et la loi de Biot et Savart ne peuvent plus être traitées dans le cadre du programme ayant cours depuis la rentrée 2014.

Indications

Partie II

10 Le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{P})$ n'est pas dirigé simplement : projeter le vecteur de la base polaire $\widehat{e_\theta}$ dans le plan cartésien en introduisant dans le plan $(\mathrm{O}xy)$ un angle θ pris entre $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ et $\widehat{e_x}$ tel que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

11 Utiliser la relation $$\mathrm{d}\mu = \mu_{\mathscr{V}}\ \mathrm{dV} = \mu\,\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{V_{tot}}}$$

sans chercher à détailler l'expression réelle de dV.

12 Introduire le rayon du cylindre ε pour pouvoir écrire le volume simplement.

13 Écrire le théorème du moment cinétique projeté selon $(\mathrm{O}y)$.

Partie III

17 Avec $\overrightarrow{v_\mathrm{O}} = 0$, utiliser la relation de cinématique du solide pour en déduire $\overrightarrow{v_\mathrm{G}}$.

21 Écrire B_z en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ puis identifier le terme $2\eta-1$ dans l'expression de B_z. Vérifier ensuite en partant de Ψ que l'on retrouve bien la formule du champ magnétique.

25 L'énergie potentielle est $\mathrm{E_{p,m}} = -\overrightarrow{\mu}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B}}$.

26 Autour de $z = z_\mathrm{e}$, le développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle donne

$$\mathrm{E_p}(z) = \mathrm{E_p}(z_\mathrm{e}) + (z-z_\mathrm{e})\,\frac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_\mathrm{e}} + \frac{1}{2}\,(z-z_\mathrm{e})^2\,\frac{\mathrm{d^2E_p}}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_{z=z_\mathrm{e}}$$

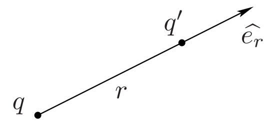
avec $\dfrac{\mathrm{dE_p}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_\mathrm{e}} = 0$ car l'on a un équilibre.

28 Les deux termes restants du laplacien peuvent-ils avoir les mêmes signes ?

29 Donner la fonction affine en respectant les conditions

$$u_{\mathrm{H_1}}(x_{\mathrm{H_1}}) = u_{\mathrm{H_{1,m}}} \qquad \text{et} \qquad u_{\mathrm{H_2}}(x_{\mathrm{H_2}}) = u_{\mathrm{H_{2,m}}}$$

$\boxed{1}$ La force exercée par une charge q sur une autre charge q' distantes de r s'écrit



$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = \frac{q\,q'}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\widehat{e_r}}$$

avec $\widehat{e_r}$ le vecteur unitaire partant de la charge q dirigé vers la charge q'. **Il s'agit de la force de Coulomb établie en 1785.**

Déterminons les unités des grandeurs intervenant dans cette loi. Pour cela, utilisons des formules liant ces paramètres à des grandeurs ayant des unités simples :

- q est la **charge électrique en coulombs (C)** ;
- r est une **distance exprimée en mètres (m)** ;
- pour déterminer les unités de ε_0, prenons la formule de la capacité C d'un condensateur plan d'épaisseur e et de surface S, c'est-à-dire $\mathrm{C} = \varepsilon_0\,\mathrm{S}/e$ avec C en farads (F). Ainsi **$\boldsymbol{\varepsilon_0}$ est en $\mathbf{F.m^{-1}}$**.

$\boxed{2}$ Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on arrive à

$$\boxed{\mathrm{F_e} = 2.10^{-8}\ \mathrm{N}}$$

La force gravitationnelle s'écrit en norme $\mathrm{F_g} = \dfrac{\mathrm{G}\,m\,m'}{r^2}$, d'où

$$\frac{\mathrm{F_e}}{\mathrm{F_g}} = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0\,\mathrm{G}\,m\,m'} = 3.10^{42} \gg 1$$

La force gravitationnelle est donc négligeable devant la force électrostatique. De même,

$$\frac{\mathrm{F_e}}{\mathrm{P}} = \frac{q\,q'}{4\pi\varepsilon_0\,r^2 m\,g} = 2.10^{21} \gg 1$$

Le poids est aussi négligeable par rapport à la force électrostatique. Ainsi, **Seule l'interaction électrostatique est à prendre en compte.**

$\boxed{3}$ Dans le champ électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ créé par la charge q, la charge q' subit la force

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = q'\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

En comparant cette expression à celle de la question 1, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\widehat{e_r}}$$

Un champ électrique dérive d'un potentiel donc **$\overrightarrow{\mathbf{E}}$ est en $\mathbf{V.m^{-1}}$**.

Les propriétés du vecteur polaire $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ reposent sur **le principe de Curie** :

- **tout plan de symétrie des charges est plan de symétrie du champ électrostatique ;**
- **tout plan d'antisymétrie de la distribution de charge est plan d'antisymétrie du champ électrostatique.**

4 Le champ magnétostatique $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}$ suit la loi de Biot et Savart :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0\,\mathrm{I}}{4\pi\,r^2}\,(\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \widehat{e}_{\mathrm{PM}})}$$

Déterminons les unités de μ_0. Utilisons l'énergie d'une bobine qui est proportionnelle à $\mathrm{L}\,i^2$ avec L l'inductance en henrys (H). De plus, d'après l'électromagnétisme, B^2/μ_0 est homogène à une énergie volumique donc

$$\boxed{\mu_0 \text{ est en } \ \mathrm{H.m^{-1}}.}$$

$\overrightarrow{\mathrm{B}}$ étant un vecteur axial :

- **tout plan de symétrie de la distribution de courant est plan d'antisymétrie du champ magnétostatique ;**
- **tout plan d'antisymétrie de la distribution de courant est plan de symétrie du champ magnétostatique.**

5 La force subie par une portion élémentaire parcourue par un courant d'intensité I suit la loi de Laplace :

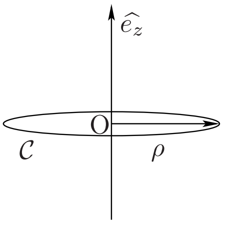
$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{F}} = \mathrm{I}\,\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}}$$

6 Le théorème d'Ampère s'énonce comme suit : Soit un contour $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ est fermé). La circulation du champ magnétique le long du contour $\mathcal{C}$, orienté, s'écrit

$$\boxed{\oint_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mu_0\,\mathrm{I_{enlacé}}}$$

$\mathrm{I_{enlacé}}$ est l'intensité algébrique qui traverse toute surface orientée, s'appuyant sur $\mathcal{C}$.

7 Tout plan passant par l'axe (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan. Par conséquent,



$$\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(\mathrm{M})\,\widehat{e}_\theta$$

De plus, le système est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon (Oz). Ainsi,

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}(\rho)\,\widehat{e}_\theta$$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de rayon ρ centré sur l'axe (Oz). D'après le théorème d'Ampère,

$$\mathrm{B}(\rho)\,2\pi\,\rho = \mu_0\,\mathrm{I}$$

donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{B}_\infty}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0\,\mathrm{I}}{2\pi\,\rho}\,\widehat{e}_\theta}$$

8 Pour un fil fini, le circuit est non fermé, donc

$$\boxed{\text{Le théorème d'Ampère ne peut pas être utilisé.}}$$