Centrale Maths 1 PSI 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yvon Vignaud (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Landelle (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet en trois parties étudie plusieurs aspects d'une famille de polynômes (V_n), appelés polynômes de Tchebychev de deuxième espèce. Cependant, les polynômes ne sont jamais nommés par leur nom officiel et leur introduction se fait par des méthodes très loin des définitions usuelles, pour ne pas dire complètement tordues.

- La première partie commence par établir une bijection réciproque R de la fonction $z \longmapsto z^2$. Bien entendu, cette application n'est pas injective dès lors que son domaine de définition est étendu à $\mathbb{C}$ tout entier. On se restreint donc au départ aux complexes de partie réelle strictement positive, et au plan complexe privé des réels négatifs à l'arrivée.

  Une fois cet outil construit, le complexe $\mathrm{V}_n(z)$ fait son apparition via une suite satisfaisant une récurrence linéaire d'ordre 2, et la partie s'achève par la preuve qu'il s'agit bien d'une quantité polynomiale (ce qui n'était pas franchement gagné).
- La deuxième partie démarre par l'étude d'une courbe du plan assez classique, appelée lemniscate de Bernoulli (mais dont le nom est, pour des raisons obscures, une nouvelle fois soigneusement caché). On relie ensuite l'intérieur de cette courbe fermée et bornée avec le domaine de convergence de la série génératrice de la suite $(\mathrm{V}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{V}_n(z)\,\mathrm{Z}^n$.
- La dernière partie est beaucoup plus classique puisqu'elle traite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire de la forme

$$(f,g) \longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}t$$

  On retrouve la famille $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (à un coefficient de normalisation près) lorsque le paramètre α est égal à 1.

Pour conclure, il s'agit d'un thème assez classique, qui couvre une large partie des chapitres du programme de prépa, mais traité ici d'une façon inhabituelle.

Indications

Partie I

I.A.4 Remarquer que le triangle OBM est isocèle en O.

I.A.5 Utiliser les relations $|z|^2 = z\bar{z}$ et $2\mathrm{R}e(z) = z + \bar{z}$.

I.A.7 Montrer que $z \mapsto z^2$ est la réciproque de R.

I.B.1 L'ensemble des solutions de $\mathrm{E}_{a,b}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

I.B.3 Utiliser la relation de récurrence double satisfaite par (V_n) pour calculer successivement $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3$. Factoriser les polynômes en z obtenus pour calculer leurs racines.

I.B.4 Procéder par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ et distinguer selon la parité.

Partie II

II.A.1 Poser $\mathrm{Z} = a + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ puis calculer $|\mathrm{Z}(\mathrm{Z} - 2a)|^2$.

II.B.1 Pour le caractère borné, procéder par l'absurde en prenant une suite $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_n)$ de points de Ω_z telle que $\lim |\mathrm{Z}| = +\infty$. Pour le caractère fermé, considérer la suite de points $\mathrm{Z}_n = z + \mathrm{R}(z^2 + 1 - 1/n)$.

II.C.1 Utiliser le résultat de I.B.1 avec $a = z$, $b = -1$ et $d = \mathrm{R}(z^2 - 1)$.

II.C.2 Comparer avec le rayon de convergence de $\sum h^{n+1}\mathrm{Z}^n$.

II.C.3 Développer en trois sommes, réindexer puis appliquer la relation de récurrence linéaire satisfaite par V.

II.C.4 Factoriser le dénominateur à l'aide de R.

II.C.5 Développer $1/(1 - q)$ en série entière avec $q = \mathrm{Z}(\mathrm{Z} - 2z)$.

II.C.6 Utiliser l'unicité du développement en série entière.

II.C.7 Montrer que $\mathrm{G}_z(x) = \mathrm{P}_n(x) + x^{n+1}\left[(2z - x)^{n+1}\mathrm{G}_z(x)\right]$ où P_n est un polynôme de degré $2n$ et calculer le coefficient en x^n de P_n. Pour cela, développer l'expression $(2z - x)^p$ avec la formule du binôme puis repérer les termes d'ordre n dans la somme double obtenue.

Partie III

III.A.1 Montrer que $p : t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha - 1/2}$ est intégrable sur $]-1\,;1\,[$.

III.A.2 Remarquer que $\varphi_\alpha(1) = 0$.

III.A.3 Effectuer une intégration par parties sur l'intervalle ouvert $]-1\,;1\,[$.

III.B.1 Résoudre cette question ainsi que les deux suivantes en calculant l'image par φ_α de la base canonique de F_n et en observant que la matrice dans cette base est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts.

III.B.4 Considérer P, Q associés à des valeurs propres distinctes λ et μ. À l'aide du résultat de la question III.A.3, établir $\lambda \mathrm{S}_\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mu \mathrm{S}_\alpha(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

III.B.5 Raisonner par l'absurde et calculer $\mathrm{S}_\alpha(1, \mathrm{P})$.

III.C.1 Remarquer que d'après les résultats des questions III.B.1, III.B.2 et III.B.3, les espaces propres de φ_1 sont des droites vectorielles.

III.C.2 Montrer que $\dfrac{1}{1 - 2x\cos t + x^2} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\sin t}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}{1 - x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}}\right)$.

III.C.5 Utiliser le changement de variable $u = \cos t$ pour calculer $\|\mathrm{V}_n\|^2$.

I. Première partie

I.A.1 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour $z = x + \mathrm{i}y$ on a

$$\mathrm{Re}\,(z) + |z| = x + \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant x + |x| \geqslant 0$$

De plus, la première inégalité est stricte si $y \neq 0$ et la deuxième inégalité est stricte si $x > 0$; en conséquence, $\mathrm{Re}\,(z) + |z| = x + \sqrt{x^2 + y^2}$ est strictement positif pour tout couple $(x, y) \notin \mathbb{R}_- \times \{0\}$. Puisque Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \longmapsto 1/\sqrt{\alpha}$ est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$, on en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus [\mathbb{R}_- \times \{0\}]$, les nombres

$$\theta(z) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(z) + |z|)}}$$

sont bien définis, de sorte que

$$\boxed{\text{Les fonctions } \theta \text{ et R sont définies sur } \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_-.}$$

I.A.2 Pour $z_1 = 4$, on a $x_1 = 4$, $y_1 = 0$. Par suite, $|z_1| = 4$ et

$$\theta(z_1) = 2\,\mathrm{Arctan}\,0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(z_1) = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{R}(z_1) = 2, \quad \theta(z_1) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(z_1)^2 = 4}$$

Pour $z_2 = 2\mathrm{i}$, on a $x_2 = 0$ et $y_2 = 2$. Ainsi, $|z_2| = 2$,

$$\theta(z_2) = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2} \qquad \mathrm{R}(z_2) = \frac{2\mathrm{i} + 2}{2} = 1 + \mathrm{i}$$

et

$$\mathrm{R}(z_2)^2 = (1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{R}(z_2) = 1 + \mathrm{i}, \quad \theta(z_2) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(z_2)^2 = 2\mathrm{i}}$$

Pour $z_3 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, on a $x_3 = 1$ et $y_3 = -\sqrt{3}$. Par conséquent, $|z_3| = 2$,

$$\theta(z_3) = 2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \mathrm{R}(z_3) = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$$

et

$$\mathrm{R}(z_3)^2 = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})^2}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{R}(z_3) = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \quad \theta(z_3) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}(z_3)^2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$$

> On constate que $\mathrm{R}(z_k)^2 = z_k$ pour $k = 1, 2$ et 3. Autrement dit, pour ces trois valeurs, $\mathrm{R}(z_k)$ est une racine carrée complexe de z_k.

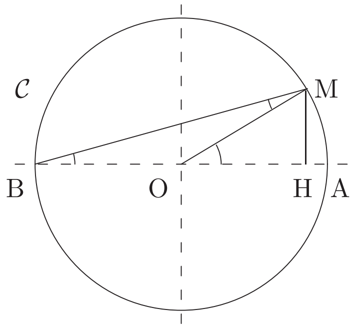
I.A.3 Par définition, Arctan est à valeurs dans $]-\pi/2\,;\pi/2\,[$ donc $\theta(z) \in\,]-\pi\,;\pi\,[$. De plus,

$$\mathrm{Re}\,\big(\mathrm{R}(z)\big) = \frac{\mathrm{Re}\,(z + |z|)}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(z) + |z|)}} = \frac{\mathrm{Re}\,(z) + |z|}{\sqrt{2(\mathrm{Re}\,(z) + |z|)}}$$

Comme on l'a vu en répondant à la question I.A.1, $\text{Re}\,(z) + |z| = x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$ et $\text{Re}\,\big(\text{R}(z)\big)$ est bien strictement positif. En résumé,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_- \qquad \theta(z) \in \,]-\pi\,;\pi\,[\quad \text{ et } \quad \text{R}(z) \in \mathcal{P}}$$

I.A.4 Notons $\text{O}, \text{A}, \text{B}, \text{M}$ les points d'affixe respective $0, |z|, -|z|, z$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $|z|$, comme représenté dans la figure suivante :



Comme les angles $\widehat{\text{ABM}}$ et $\widehat{\text{AOM}}$ interceptent le même arc du cercle $\mathcal{C}$ de centre O, le théorème de l'angle au centre garantit que

$$\arg(z) = \widehat{\text{AOM}} = 2\,\widehat{\text{ABM}} = 2\arg\frac{z_\text{M}-z_\text{B}}{z_\text{A}-z_\text{B}}$$

puis

$$= 2\arg\frac{z+|z|}{2|z|} = 2\arg(z+|z|)$$

Enfin, soit H le point d'affixe $x = \text{Re}\,(z)$. Le point H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses donc le triangle HBM est rectangle en H et

$$\tan\widehat{\text{ABM}} = \tan\widehat{\text{HBM}} = \frac{\text{HM}}{\text{HB}} = \frac{\text{Im}\,z}{|z|+\text{Re}\,(z)} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Or $\widehat{\text{ABM}} \in \,]-\pi/2\,;\pi/2\,[$, si bien que la composition par l'arctangente donne

$$\widehat{\text{ABM}} = \text{Arctan}\,\left(\tan\widehat{\text{ABM}}\right) = \text{Arctan}\,\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\theta(z)}{2}$$

Par suite,

$$\boxed{2\,\widehat{\text{ABM}} = \arg(z) = 2\arg(z+|z|) = \theta(z)}$$

I.A.5 Commençons par calculer $\text{R}(z)^2$. On a

$$(z+|z|)^2 = z^2 + 2z|z| + |z|^2 = z\big(z+2|z|+\overline{z}\big) = 2z\big(|z|+\text{Re}\,(z)\big)$$

d'où

$$\big(\text{R}(z)\big)^2 = \frac{2z\big(|z|+\text{Re}\,(z)\big)}{2\big(\,\text{Re}\,(z)+|z|\big)} = z$$

puis

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_- \qquad \big(\text{R}(z)\big)^2 = z}$$

Autrement dit, $\text{R}(z)$ est une racine carrée de z. On a alors

$$|\text{R}(z)|^2 = |z| \quad \text{ et par suite } \quad |\text{R}(z)| = |z|^{\frac{1}{2}}$$

Le résultat de la question I.A.4 assure par ailleurs que

$$\arg\big(\text{R}(z)\big) = \arg\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{2\big(\,\text{Re}\,(z)+|z|\big)}}\right) = \arg(z+|z|) = \frac{\theta(z)}{2}$$