X Physique A PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Rémy Hervé (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur la caractérisation des pièges optiques et leur utilisation en tant que pinces optiques moléculaires par une approche mêlant électromagnétisme et optique.

- La première partie commence par quelques questions de cours sur les dipôles électriques puis étudie la stabilité longitudinale d'une particule polaire dans un piège électromagnétique.
- Dans la deuxième, on dimensionne un tel piège à l'aide d'un faisceau laser diffracté puis focalisé par une lentille. Le calcul de la figure de diffraction permet d'évaluer un ordre de grandeur théorique de la constante de rappel transversal du piège.
- La troisième partie s'intéresse à l'amplitude du mouvement aléatoire dû à l'agitation thermique au sein du piège. Son étude fréquentielle montre que la constante de rappel transversal du piège est accessible par l'expérience.
- Enfin, dans la quatrième partie, le piège optique sert à maintenir une petite bille fixée à l'extrémité d'une molécule d'ADN. Le déplacement du laser permet d'exercer une traction sur la bille piégée dans le faisceau et donc d'étirer la molécule. On parle de pince optique. Des résultats expérimentaux viennent valider cette utilisation.

L'épreuve fait appel à l'électrostatique, aux ondes électromagnétiques, à l'optique ondulatoire et à la mécanique des fluides. Réussir une telle épreuve demande une triple compétence : une connaissance sans faille de ces nombreux aspects du cours, le recul nécessaire à leur utilisation dans une situation originale, et enfin une autonomie certaine, puisque l'énoncé comporte quelques questions difficiles, peu directives, et offre peu de schémas.

Enfin, comme les années précédentes, la calculatrice n'était pas autorisée pour cette épreuve. Les applications numériques sont dans ce cas bien valorisées dans les barèmes. Ce sujet est conforme aux programmes en vigueur depuis la rentrée scolaire 2014.

Indications

2 Supposer $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ uniforme à l'ordre 0 sur l'étendue du dipôle et bien distinguer le point d'application des forces exercées en A et B.

4 Écrire $\mathrm{E}\big(\pm\dfrac{a}{2},0,0\big)$ avec un développement de Taylor en $x=0$ à l'ordre 1.

6 L'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle fournit une relation entre les dimensions des paramètres intervenant dans la définition de α.

7 Utiliser la définition de α et reformuler l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ pour qu'elle corresponde à l'un des termes de la relation donnée par l'énoncé.

8 Projeter $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ selon $\overrightarrow{u_z}$ et considérer le signe de F_z de part et d'autre de $z=z_{\mathrm{m}}$.

11 Quel est le signe de la dérivée de E_0 en $z=z_{\mathrm{eq}}$?

12 Quel doit être le signe de

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(\mathrm{F}_z+\mathrm{F}_{\mathrm{D}}\Big)$$

en $z=z_{\mathrm{eq}}$ pour qu'il s'agisse d'une position d'équilibre stable ? Vérifier que cette condition équivaut à la relation (**4**) modifiée avec

$$\ln \mathrm{E}_0=\frac{1}{2}\ln\left({\mathrm{E}_0}^2\right)$$

13 Dans le cadre des nouveaux programmes, il faut admettre que l'amplitude diffractée dans la direction θ vers un point M à l'infini est la résultante des amplitudes élémentaires diffractées par chacun des points P d'abscisse X de la fente proportionnellement à la largeur élémentaire dX :

$$\underline{s}(\theta)=\mathrm{K}\,\underline{s}_{\mathrm{O}}\int_{\mathrm{P}}\exp\big(-\mathrm{i}\,\varphi(\mathrm{P})\big)\;\mathrm{dX}$$

avec K, constante de proportionnalité, $\underline{s}_{\mathrm{O}}$, amplitude du rayon de référence diffracté dans la direction θ au centre O de la pupille et $\varphi(\mathrm{P})$, déphasage du rayon diffracté en P par rapport à ce rayon de référence. Exprimer $\varphi(\mathrm{P})$ en fonction de k, X et θ.

16 L'ouverture angulaire θ du faisceau diffracté par une pupille de largeur D vérifie

$$\sin\theta\simeq\frac{\lambda}{\mathrm{D}}$$

17 Par « flux d'énergie électromagnétique », comprendre flux surfacique de puissance électromagnétique. Sur quelle surface la majeure partie de la puissance P se trouve-t-elle concentrée ?

18 L'intensité lumineuse I correspond à l'amplitude du vecteur de Poynting moyen. En considérant une onde plane, relier l'amplitude du champ électrique E_0 à l'intensité I. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance P d'un laser usuel ?

20 Quelle traînée correspond au nombre de Reynolds évalué à la question 19 ?

21 Utiliser les ordres de grandeur du déplacement et du temps caractéristiques de la bille pour obtenir une estimation de sa vitesse et de son accélération.

23 Comment se place la pulsation ω_{c} par rapport aux asymptotes dans un diagramme logarithmique ?

26 Écrire $\overrightarrow{r}=\sum\limits_{i=1}^{\mathrm{N}}\overrightarrow{r_i}$.

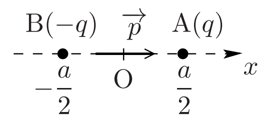
30 Comparer le déplacement de la bille piégée calculé à la question 29 au diamètre w du piège évalué à la question 16.

Pièges optiques

1. Force exercée par le champ électromagnétique sur une particule diélectrique

1 Les charges opposées $A(q)$ et $B(-q)$ forment un dipôle électrique de moment dipolaire

$$\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{BA}$$



orienté de la charge négative vers la charge positive. Il vient

$$\boxed{\overrightarrow{p} = q\,\overrightarrow{a}}$$

2 Le champ $\overrightarrow{E}$ varie peu sur la distance a. Travaillons à l'ordre 0 en le supposant uniforme sur l'étendue du dipôle. Il s'exerce des forces opposées $q\overrightarrow{E}$ et $-q\overrightarrow{E}$ aux points A et B. La résultante des forces exercées sur le dipôle est donc nulle :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}}$$

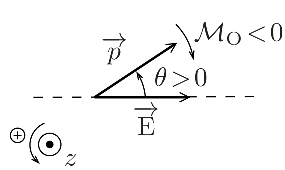
et le moment en O associé s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}_O} &= \overrightarrow{OA} \wedge q\,\overrightarrow{E} + \overrightarrow{OB} \wedge -q\,\overrightarrow{E}\\ &= \frac{\overrightarrow{a}}{2} \wedge q\,\overrightarrow{E} - \frac{\overrightarrow{a}}{2} \wedge -q\,\overrightarrow{E}\\ &= q\,\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{E}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{E}}$$

> La résultante des forces $\overrightarrow{F}$ n'est nulle que si $\overrightarrow{E}$ est supposé uniforme à l'ordre 0. Si l'on prend en compte les faibles variations à l'ordre 1 du champ sur l'étendue du dipôle, il est possible d'obtenir une expression plus précise dont le calcul sera demandé à la question 4.

3 Notons θ l'angle orienté entre $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{p}$ autour du vecteur normal $\overrightarrow{u_z}$. Il vient



$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = -p\mathrm{E}\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

Supposons $\theta > 0$, le moment est négatif et tend à diminuer θ. Supposons $\theta < 0$, le moment est positif et tend à augmenter θ. Dans les deux cas, on se dirige vers la valeur à l'équilibre $\theta = 0$ où le moment est nul.

$$\boxed{\text{Le moment aligne le dipôle sur le champ électrique.}}$$

4 Une fois $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ alignés, le moment est rigoureusement nul mais la force évaluée à la question 2 ne l'est qu'approximativement. Reprenons le calcul en travaillant à l'ordre 1 et en supposant les vecteurs colinéaires et portés par $\overrightarrow{u_x}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{F}} &= q\left[\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) - \overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{B})\right]\\ &= q\left[\mathrm{E}\big(\frac{a}{2},0,0\big) - \mathrm{E}\big(-\frac{a}{2},0,0\big)\right]\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

Un développement de Taylor à l'ordre 1 donne

$$\mathrm{E}\big(\pm\frac{a}{2},0,0\big) = \mathrm{E}\big(0,0,0\big) \pm \frac{a}{2} \times \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}(0,0,0)$$

d'où
$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = qa\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x}$$

soit
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = p\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x}}$$

5 Supposons E fonction croissante de x, la force est selon $\overrightarrow{u_x}$ et tend à déplacer le dipôle vers les x croissants. Supposons E fonction décroissante de x, la force est selon $-\overrightarrow{u_x}$ et le déplacement se fait selon les x décroissants. Dans les deux cas, le dipôle se dirige dans le sens d'une augmentation de $\mathrm{E}(x)$.

$$\boxed{\text{La force amène le dipôle là où le champ électrique est le plus fort.}}$$

6 D'après la question 1,
$$\big[p\big] = \big[q\big]\,\big[a\big]$$

donc
$$\big[\alpha\big] = \frac{\big[p\big]}{\big[\varepsilon_0\big]\,\big[a\big]^3\,\big[\mathrm{E}\big]} = \frac{\big[q\big]}{\big[\varepsilon_0\big]\,\big[a\big]^2\,\big[\mathrm{E}\big]}$$

L'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

justifie
$$\big[\mathrm{E}\big] = \frac{\big[q\big]}{\big[\varepsilon_0\big]\,\big[a\big]^2}$$

d'où $\big[\alpha\big] = 1$ et $\boxed{\alpha \text{ est sans dimension.}}$

7 Retravaillons l'expression établie à la question 4 sachant que $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ sont colinéaires et portés par $\overrightarrow{u_x}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{F}} &= p\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x}\\ &= p\,\frac{\partial}{\partial x}\,\big(\overrightarrow{\mathrm{E}}\big)\\ &= \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\nabla}\big(\overrightarrow{\mathrm{E}}\big)\\ \overrightarrow{\mathrm{F}} &= \varepsilon_0\,a^3\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{\nabla}\big(\overrightarrow{\mathrm{E}}\big)\end{aligned}$$