X Maths PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Simon Billouet (ENS Cachan) ; il a été relu par Pauline Tan (ENS Cachan) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse est consacré à des propriétés asymptotiques d'intégrales à paramètre. Il est composé de trois parties indépendantes.

- La première partie s'intéresse au comportement quand t tend vers $+\infty$ d'intégrales du type
$$\int_a^b \mathrm{e}^{-t\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$$
à l'aide d'une technique appelée méthode de Laplace, et présente en application une démonstration de la formule de Stirling.
- La deuxième partie établit l'égalité
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
lorsque ψ est une fonction continue 2π-périodique, et f de classe $\mathcal{C}^1$. Une application est proposée dans le cadre des équations différentielles.
- La troisième partie étudie le comportement quand λ tend vers $+\infty$ d'intégrales du type
$$\int_a^b \mathrm{e}^{i\lambda\varphi(x)} f(x)\,\mathrm{d}x$$
selon une méthode dite de la phase stationnaire.

Les parties sont de difficulté croissante, les dernières questions étant même particulièrement ardues. Toutes les connaissances en calcul intégral sont sollicitées : convergence dominée, intégration par parties, changement de variable. Les première et troisième parties forment un excellent sujet d'entraînement ; à l'exception de la dernière question, la dernière partie ne fait appel qu'au programme de sup.

La disparition des séries de Fourier et de l'intégrale double du programme des classes préparatoires scientifiques rend la deuxième partie hors-programme, ainsi que la dernière question du sujet. Les indications sur ces questions doivent permettre de les traiter en admettant les résultats sortis du programme.

Indications

Partie I

1.a Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

1.b Reprendre le même raisonnement qu'à la question 1.a après avoir effectué le changement de variable $u = \sqrt{t}x$.

3.a Pour montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ en a, écrire des formules de Taylor au voisinage de a pour φ et φ'.

3.b Utiliser le théorème de la bijection.

4.a Montrer que $\Gamma(n) = \Gamma(n+1)/n$ à l'aide d'une intégration par parties.

Partie II

5.b [HP] Admettre le théorème de Parseval, qui assure que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi')|^2$ converge. Utiliser ensuite l'inégalité $x\,y \leqslant \left(x^2+y^2\right)/2$.

5.c [HP] Admettre que ϕ est égale à la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ sur $\mathbb{R}$, où u_n est définie par $u_n : x \longmapsto c_n(\phi)\mathrm{e}^{\,inx}$.

6.a [HP] Admettre que la convergence de la série de la question précédente est normale sur $\mathbb{R}$, afin d'intervertir la somme et l'intégrale.

7.c Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

7.e Appliquer l'inégalité triangulaire et utiliser la question 7.c.

7.f Utiliser la variante du résultat sur les sommes de Riemann pour des subdivisions non régulières. Précisément : $\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}_\varepsilon-1} (x_{k+1}^\varepsilon - x_k^\varepsilon) f(x_k^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

8.b [HP] La méthode de variation des constantes fait l'objet d'une remarque en introduction de la réponse de ce corrigé.

8.c Appliquer le résultat de la question 7.f avec $\phi = g$ et $f = \sin(t-\cdot)$.

Partie III

9.b Montrer par récurrence que $\mathrm{I}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^{\mathrm{N}}}\left(\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{M}^{\mathrm{N}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$.

10.a La fonction φ' étant monotone, φ'' est de signe constant sur $[\,a\,;b\,]$: par suite,

$$\left|\int_a^b \frac{\varphi''(x)}{\phi(x)^2}\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b \frac{|\varphi''(x)|}{\phi(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

11.a Discuter suivant les signes possibles de φ' et φ'' sur $[\,a\,;b\,]$.

11.b Utiliser l'égalité des accroissements finis et traiter les 5 cas de la question 11.a.

11.c Découper l'intervalle de sorte à pouvoir appliquer le résultat de la question 10.b sur certains des morceaux.

11.d Minimiser la fonction $\delta \longmapsto 2c_1(\lambda\delta)^{-1} + 2\delta$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11.e [HP] Utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour f'. Utiliser ensuite le résultat suivant (*théorème de Fubini sur un triangle*) : si h est une fonction à valeurs réelles continue sur le carré $[\,a\,;b\,]\times[\,a\,;b\,]$,

$$\int_a^b \left(\int_x^b h(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_a^t h(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

I. Intégrales à phase réelle

1.a Soit $t > 0$. Effectuons le changement de variable linéaire $u = tx$:

$$\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^{td} \mathrm{e}^{-u} g\left(\frac{u}{t}\right)\,\mathrm{d}u$$

Définissons la fonction $g_t : \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad u \longmapsto g\left(\dfrac{u}{t}\right)\mathbf{1}_{[\,0\,;td\,]} \end{cases}$

où $\mathbf{1}_{[\,0\,;td\,]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[\,0\,;td\,]$. La fonction g_t est continue par morceaux (comme produit de deux fonctions continues par morceaux) sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et

$$\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u$$

Déterminons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u$ en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[\,0\,;+\infty\,[$ tendant vers $+\infty$. Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_{t_n}(u)\,\mathrm{d}u$ existe en utilisant le théorème de convergence dominée. Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$f_n : \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad u \longmapsto \mathrm{e}^{-u} g_{t_n}(u) \end{cases}$$

- La fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $u \in [\,0\,;+\infty\,[$. Par hypothèse, il existe un entier N tel que $u \leqslant t_n d$ dès que $n \geqslant \mathrm{N}$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a donc $f_n(u) = \mathrm{e}^{-u} g\left(u/t_n\right)$. Par continuité de g en 0, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(u) = \mathrm{e}^{-u} g(0)$: ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u} g(0)$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
- L'inégalité $|f_n(u)| \leqslant \mathrm{e}^{-u}\|g\|_\infty$ est valable pour $u \in [\,0\,;+\infty\,[$, et la fonction de domination $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u}\|g\|_\infty$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_{t_n}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g(0)\,\mathrm{d}u = g(0)$$

Cette égalité étant vraie pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u = g(0)$$

La quantité $g(0)$ étant non nulle, on peut affirmer que

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x \times \frac{t}{g(0)}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} g_t(u)\,\mathrm{d}u\right) \times \frac{1}{g(0)} = 1$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{\int_0^d \mathrm{e}^{-tx} g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}}$$

1.b Soit $t > 0$. Le changement de variable linéaire $u = \sqrt{t}x$ donne l'égalité

$$\int_0^d \mathrm{e}^{-tx^2} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}d} \mathrm{e}^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}u$$

On pose $$g_t\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad u \quad \longmapsto g\left(u/\sqrt{t}\right) \mathbf{1}_{[\,0\,;\sqrt{t}d\,]} \end{cases}$$

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \mathrm{e}^{-u^2} g_t(u) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-u^2} g(0) \qquad \text{et} \qquad \left|\mathrm{e}^{-u^2} g_t(u)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-u^2} \|g\|_\infty$$

avec $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}\|g\|_\infty$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite combinée au théorème de convergence dominée, on montre comme à la question 1.a que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{\sqrt{t}d} \mathrm{e}^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\,\mathrm{d}u = g(0) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = g(0)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit que $$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t} \int_0^d \mathrm{e}^{-tx^2} g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par conséquent, $$\boxed{\int_0^d \mathrm{e}^{-tx^2} g(x)\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{g(0)}{\sqrt{t}}}$$

2.a La fonction Φ, en tant que somme d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et d'une fonction constante, est de classe $\mathcal{C}^1$, et $\Phi' = \varphi'$ est une fonction strictement positive sur $[\,a\,;b\,]$. La fonction Φ est donc strictement croissante sur $[\,a\,;b\,]$; comme elle y est de plus continue, elle réalise une bijection de $[\,a\,;b\,]$ sur $[\,\Phi(a)\,;\Phi(b)\,]$. Or, $\Phi(a) = 0$. En notant $\beta = \Phi(b)$, on obtient que

$$\boxed{\Phi \text{ réalise une bijection de } [\,a\,;b\,] \text{ sur } [\,0\,;\beta\,], \text{ de classe } \mathcal{C}^1.}$$

2.b La question précédente montre que Φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Puisque sa dérivée ne s'annule pas sur $[\,a\,;b\,]$, sa réciproque Φ^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$. Le changement de variable $x = \Phi^{-1}(u)$ est donc admissible :

$$\mathrm{d}x = \left(\Phi^{-1}\right)'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)}\,\mathrm{d}u$$

On a donc $$\mathrm{F}(t) = \mathrm{e}^{-t\varphi(a)} \int_0^\beta \mathrm{e}^{-tu} f(\Phi^{-1}(u)) \frac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)}\,\mathrm{d}u$$

Soit $$g\colon \begin{cases} [\,0\,;\beta\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad u \quad \longmapsto f(\Phi^{-1}(u)) \dfrac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)} \end{cases}$$

En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction g est continue sur $[\,0\,;\beta\,]$. De plus, $g(0) = f(a)/\Phi'(a) = f(a)/\varphi'(a) \neq 0$ puisque $f(a) \neq 0$. D'après le résultat de la question 1.a,

$$\int_0^\beta \mathrm{e}^{-tu} f(\Phi^{-1}(u)) \frac{1}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(u)\right)}\,\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(a)}{\varphi'(a)t}$$

Puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\phi(a)}$ ne s'annule pas sur un voisinage de $+\infty$, on en déduit enfin que

$$\boxed{\mathrm{F}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-t\varphi(a)} f(a)}{\varphi'(a)t}}$$