Centrale Maths 1 MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sadik Boujaida (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Christophe Fiszka (ENS Cachan) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Cette épreuve possède un thème central, les fonctions matricielles, qui sont ici des applications à valeurs dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et dont la variable est une matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. On y évoque, par exemple, les matrices $\cos(\mathrm{A})$ et $\sin(\mathrm{A})$. Les outils utilisés font appel au cours d'algèbre, bien sûr, mais aussi à celui d'analyse. Ses cinq parties ont les thèmes suivants, dans l'ordre :

- On étudie certaines propriétés de la norme euclidienne canonique de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, notamment son caractère sous-multiplicatif.
- Lorsque $\sum a_n z^n$ est une série entière à coefficients complexes, on démontre que la série de fonctions $\sum a_n \mathrm{A}^n$, où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, admet une somme bien définie et continue sur un domaine précisé. On prouve en outre que, lorsqu'elle existe, la somme de la série $\sum a_n \mathrm{A}^n$ est un polynôme en A.
- On justifie une relation « trigonométrique » $\sin^2 \mathrm{A} + \cos^2 \mathrm{A} = \mathrm{I}_d$ sur les matrices et, en utilisant la série de fonction $\sum (\mathrm{R}e^{\,i\,\theta})^{-n} \mathrm{A}^n$ de la variable réelle θ, on démontre le théorème de Cayley-Hamilton.
- On démontre que les fonctions continues sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;\mathrm{M}\,[$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle $2f(x+y) = f(2x) + f(2y)$, pour tout $(x,y) \in\,]-\infty\,;\mathrm{M}/2\,[^2$, sont les fonctions affines.
- On détermine les applications continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, \mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{A} \text{ est inversible } \Longrightarrow \big(\xi(a_{i,j})\big)_{i,j} \text{ est inversible}$$

Globalement, le sujet n'exige pas une connaissance profonde du cours. Par contre, c'est un bon moyen pour affûter son sens de la logique et de la rigueur mathématique. En outre, fait assez rare dans les sujets de concours pour être souligné, ce problème comporte des questions qui traitent de séries de fonctions d'une variable vectorielle, ainsi que des intégrales de fonctions de la variable réelle mais à valeurs dans l'algèbre $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. La partie III propose, en utilisant ces outils, de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton, rien de moins.

Les deux dernières parties, indépendantes du reste du sujet, ne nécessitent que des connaissances normalement acquises en première année de prépa et peuvent de ce fait être utilisées très tôt dans l'année de spé. Il y est question des propriétés usuelles des fonctions continues, d'équations fonctionnelles, de calcul de déterminants et de manipulation de matrices inversibles.

Indications

Partie I

I.A Examiner les applications composantes, dans la base canonique de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, de l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

I.B Écrire les expressions de $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AB})$ et de $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AA})$ en fonctions des coefficients peut être d'une grande aide, dans cette question et dans les suivantes.

I.D Appliquer d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir une majoration de $(\mathrm{AB})_{j,j}^2$ et additionner ensuite pour former une majoration de $\|\mathrm{AB}\|^2$.

Partie II

II.A Utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. Prêter attention au fait qu'il s'agit ici d'une série de fonctions dont la variable est vectorielle (ce n'est pas une « série entière »).

II.B.1 Penser au polynôme minimal de A, ou bien considérer la partie de $\mathbb{N}$:

$$\left\{k \in \mathbb{N} \mid (\mathrm{I}_d, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^k) \text{ est liée}\right\}$$

II.B.2 Remarquer que A^r est une combinaison linéaire de $\mathrm{I}_d, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{r-1}$ et raisonner ensuite par récurrence sur $n \geqslant r$.

II.B.3 Constater que $(\mathrm{I}_d, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{r-1})$ est une base de $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$ et utiliser l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}[\mathrm{A}]$.

II.B.5 Il y a une erreur dans l'énoncé. Il faut prendre P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et non dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Constater que $\sum a_n \mathrm{A}^n$ est la somme d'un nombre fini de séries convergentes.

II.B.6 Exprimer A^2 en fonction de A permet de conclure rapidement.

II.C Analyser, quand ils sont définis, les éléments $\varphi(x\mathrm{I}_d)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Partie III

III.A.1 Citer le résultat sur la convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

III.A.2 Penser à justifier la convergence absolue des séries qui représentent $\mathrm{e}^{\,\mathrm{iA}}$ et $\mathrm{e}^{\,\mathrm{iB}}$ pour pouvoir utiliser le résultat de cours rappelé en III.A.1.

III.A.3 Exprimer de façon rigoureuse $\mathrm{e}^{\,\mathrm{iA}}$ et $\mathrm{e}^{\,-\mathrm{iA}}$ en fonction de $\cos \mathrm{A}$ et $\sin \mathrm{A}$. Penser à justifier que $\cos(\mathrm{A})$ et $\sin(\mathrm{A})$ commutent.

III.B.1 Justifier que la série $\sum (\mathrm{Re}^{\,\mathrm{i}\,\theta})^{-n} \mathrm{A}^n$ converge pour R assez grand et utiliser ses sommes partielles pour déterminer l'expression de $(\mathrm{Re}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\mathrm{I}_d - \mathrm{A})^{-1}$ comme somme d'une série.

III.B.2 Appliquer un résultat sur l'intégration terme à terme d'une série de fonctions au développement de la question précédente.

III.B.3 Constater, lorsque c'est possible, que $\chi_\mathrm{A}(z)(\mathrm{A} - z\mathrm{I}_d)^{-1} = {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{A} - z\mathrm{I}_d)$ et que les coefficients de $\mathrm{Com}(\mathrm{A} - z\mathrm{I}_d)$ sont des fonctions polynomiales de z.

Partie IV

IV.A Écrire $\mathrm{F}(x+y) - \mathrm{F}(x+\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^y f(x+t)\,\mathrm{d}t$.

IV.B Justifier par récurrence que f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

IV.C Dériver deux fois la relation $2f(x+y) = f(2x) + f(2y)$ en alternant les variables. Dériver une autre relation fonctionnelle de f peut aussi aboutir.

Partie V

V.B Calculer les déterminants de A et de $f_\xi(\mathrm{A})$. Pour le deuxième, simplifier les lignes de la $3^{\text{ème}}$ à la $d^{\,\text{ème}}$ en utilisant des opérations élémentaires avec la deuxième ligne.

V.E.1 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires sur $[\,0\,;2\,]$, sans omettre de discuter selon la monotonie de ξ.

V.F Utiliser l'implication : $\xi(a)\xi(d) = \xi(b)\xi(c) \Longrightarrow ad = bc$ et choisir convenablement a, b, c et d en fonction de x et y.

V.G.1 Déterminer l'ensemble des éléments dont l'image par la fonction exponentielle est dans l'intervalle $\mathrm{I} \cap \,]\,0\,;+\infty\,[$.

V.G.2 Utiliser les résultats des questions IV.C et V.G.1.

V.G.3 Penser à faire intervenir la fonction $\xi_1 : x \mapsto -\xi(-x)$, et justifier que la fonction réciproque η_1 de ξ_1 vérifie les mêmes hypothèses que η.

V.G.4 Noter $\mathrm{I} = \,]\,a\,;b\,[$ et justifier que η tend vers $+\infty$ en b en utilisant l'expression de η. Constater que $\eta(-x)^2 = \eta(x)^2$ et que η est strictement négative sur $]\,-\infty\,;0\,[$.

V.H Utiliser les questions précédentes lorsque ξ est positive sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Considérer la fonction $\xi_1 = -\xi$ lorsque ξ est négative sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

V.I Ajouter toutes les lignes à la première et utiliser la nouvelle ligne pour simplifier la matrice.

V.J Discuter selon que $d = 2$ ou $d > 2$. Dans le cas $d > 2$ utiliser la question V.H et l'implication

$$f_\xi(\mathrm{A}_\lambda) \text{ non inversible } \Longrightarrow \mathrm{A}_\lambda \text{ non inversible}$$

en choisissant judicieusement le paramètre λ.

I. Une norme utile sur l'espace $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$

I.A Soit un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ les coefficients de $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ s'expriment de manière polynomiale en fonction de A. Ce qui signifie que les applications composantes, dans la base canonique de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, de l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A})$ sont des fonctions polynomiales. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}], \text{ l'application } \mathrm{A} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{A}) \text{ de } \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathscr{M}_d(\mathbb{C}) \text{ est continue.}}$$

I.B D'abord, on constate que pour tout entier j compris entre 1 et d

$$({}^t\mathrm{AB})_{j,j} = \sum_{k=1}^{d} \mathrm{A}_{k,j}\mathrm{B}_{k,j}$$

ce qui mène à
$$\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AB}) = \sum_{1\leqslant k,j\leqslant d} \mathrm{A}_{k,j}\mathrm{B}_{k,j} \qquad (\mathbf{1})$$

Maintenant, on vérifie que

- pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, l'application $\mathrm{B} \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AB})$ est linéaire par linéarité de la trace et de la transposition ;
- pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in (\mathscr{M}_d(\mathbb{R}))^2$, $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,\left({}^t({}^t\mathrm{AB})\right) = \mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{BA})$;
- pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AA}) = \sum\limits_{1\leqslant j,k\leqslant d} \mathrm{A}_{j,k}^{\,2} \geqslant 0$;
- enfin, si $\mathrm{A} \neq 0$, $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AA}) > 0$, car dans l'écriture précédente de $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AA})$, l'un au moins des coefficients $\mathrm{A}_{j,k}$ est non nul.

Ainsi, $\boxed{\text{L'application } (\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AB}) \text{ est un produit scalaire de } \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).}$

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Noter la similitude de l'écriture (1) avec l'expression du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$. La norme associée est définie par

$$\forall\,\mathrm{A} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}) \qquad \|\mathrm{A}\| = \left(\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{AA})\right)^{1/2} = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} \mathrm{A}_{i,j}^{\,2}\right)^{1/2}$$

Cette norme est appelée norme de Schur (ou de Frobenius) de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Si on note également $\|.\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ et si $(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\ldots,\mathrm{E}_d)$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ alors on constate que $(\mathrm{AE}_1,\mathrm{AE}_2,\ldots,\mathrm{AE}_d)$ est la famille des vecteurs colonnes de A et que

$$\|\mathrm{A}\| = \left(\sum_{j=1}^{d} \|\mathrm{AE}_j\|^2\right)^{1/2} \qquad (\mathbf{2})$$

Si $\mathrm{X} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_d\end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ alors

$$\|\mathrm{AX}\|^2 = \sum_{j=1}^{d} (\mathrm{AX})_j^2 = \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} \mathrm{A}_{j,k}x_k\right)^2$$

et via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout j compris entre 1 et d,

$$\left(\sum_{k=1}^{d} \mathrm{A}_{j,k}x_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} \mathrm{A}_{j,k}^{\,2}\right)\left(\sum_{k=1}^{d} x_k^{\,2}\right) = \|\mathrm{X}\|^2 \sum_{k=1}^{d} \mathrm{A}_{j,k}^{\,2}$$